

# Ασκήσεις Γενικά Μαθηματικά Ι

## Λύσεις ασκήσεων Ομάδας 1

Λουκάς Βλάχος και Χάρης Σκόκος

**1)** Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

1.  $f_1(x) = \log_x(5x + 3)$

2.  $f_2(x) = (x + 2)\sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$

3.  $f_3(x) = 3\sqrt{\sin x} + 2\sqrt{-x^2 + 1}$

**Λύση:**

1. Πρέπει  $5x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -5/3$  και  $0 < x \neq 1$ . Επομένως το πεδίο ορισμού είναι  $D(f_1) = (0, 1) \cup (1, +\infty)$ .

2. Πρέπει  $\frac{1+\sin x}{1-\sin x} \geq 0 \Leftrightarrow (1 + \sin x)(1 - \sin x) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq \sin x \leq 1$  που ισχύει για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Επίσης πρέπει  $\sin x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ . Επομένως  $D(f_2) = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ .

3. Πρέπει  $-x^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (1 - x)(1 + x) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$ , και  $\sin x \geq 0 \Leftrightarrow 2k\pi \leq x \leq 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}$ . Επομένως το πεδίο ορισμού είναι  $D(f_3) = [0, 1]$ .

**2)** Αν  $f(x) = ax + b, a \neq 0$ , να βρεθεί (αν υπάρχει) η αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}(x)$ . Να βρεθούν επίσης τα  $a, b$  ώστε  $f = f^{-1}$ .

**Λύση:** Για το πεδίο ορισμού της συνάρτησης έχουμε:  $D(f) = \mathbb{R}$ . Για κάθε  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $f(x_1) = f(x_2)$  έχουμε  $ax_1 + b = ax_2 + b \Rightarrow a(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$ . Επομένως η συνάρτηση είναι 1-1, οπότε και αντιστρέφεται.

Θέτουμε  $y = ax + b \Leftrightarrow x = \frac{1}{a}(y - b)$ . Άρα ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης είναι  $f_1^{-1}(x) = \frac{1}{a}(x - b)$  με πεδίο ορισμού  $D(f_1^{-1}) = \mathbb{R}$ .

Για να είναι  $f = f^{-1}$  πρέπει για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  να έχουμε  $ax + b = \frac{1}{a}(x - b) \Rightarrow \{a = \frac{1}{a}, b = -\frac{b}{a}\} \Rightarrow \{(a = 1, b = 0), (a = -1, b \in \mathbb{R})\}$

**3)** Να υπολογιστούν τα όρια:

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt[3]{x+1} - 1}$
2.  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\tan(\pi x)}{x+4}$

**Λύση:**

1. Έχουμε απροσδιοριστία  $\frac{0}{0}$ . Το πεδίο ορισμού είναι  $D(f) = (0, +\infty)$ . Θέτουμε  $y^6 = x+1$  οπότε έχουμε  $\frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt[3]{x+1} - 1} = \frac{y^3 - 1}{y^2 - 1} = \frac{(y-1)(y^2 + y + 1)}{(y-1)(y+1)} = \frac{\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[6]{x+1} + 1}{\sqrt[6]{x+1} + 1}$ .  
Επομένως  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt[3]{x+1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[6]{x+1} + 1}{\sqrt[6]{x+1} + 1} = \frac{3}{2}$ .
2. Έχουμε απροσδιοριστία  $\frac{0}{0}$ . Θέτουμε  $x = -4+h$ , οπότε  $\frac{\tan(\pi x)}{x+4} = \frac{\tan(-4\pi + \pi h)}{h} = \frac{\tan(\pi h)}{h} = \pi \frac{\sin(\pi h)}{\pi h} \frac{1}{\cos(\pi h)}$ . Επομένως  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\tan x}{x+4} = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \pi \frac{\sin(\pi h)}{\pi h} \frac{1}{\cos(\pi h)} \right) = \pi$ .

**4) Να υπολογισθεί το όριο της συνάρτησης**

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2}{x-2}$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(5x)}{\tan(3x)}$

**Λύση:**

1. Το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{1 - 2/x} = \infty$$

2. Η συνάρτηση

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\tan(5x)}{\tan(3x)} = \frac{\sin(5x)}{\cos(5x)} \cdot \frac{1}{\frac{\sin(3x)}{\cos(3x)}} \\ &= \frac{\sin(5x) \cos(3x)}{\sin(3x) \cos(5x)} = \frac{5 \frac{\sin(5x)}{5x} \cos(3x)}{3 \frac{\sin(3x)}{3x} \cos(5x)} \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \frac{5}{3} \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

**5)** Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

**Λύση:** (βλέπε και λύση στη σελίδα 104 του βιβλίου)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-\sin x)}{1} = 0$$

**6)** Να υπολογίσετε (αν υπάρχει) το όριο

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{5x - 3}{2x + 3}}$$

**Λύση:**

Το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{5x^2 - 3x}{2x^2 + 3x}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

# Ασκήσεις Γενικά Μαθηματικά Ι

## Λύσεις ασκήσεων Ομάδας 2

Λουκάς Βλάχος και Χάρης Σκόκος

**1)** Να προσδιοριστούν τα  $a, b \in \mathbb{R}$ , ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+3}, & \text{αν } x \geq 2 \\ ax+b, & \text{αν } x < 2 \end{cases}$$

να είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 2$ .

**Λύση:** Αναγκαία συνθήκη ώστε η συνάρτηση να είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 2$  είναι να είναι συνεχής στο σημείο αυτό. Η συνέχεια εξασφαλίζεται όταν  $2a + b = \sqrt{5}$ . Απαιτώντας την ισότητα της δεξιάς με την αριστερή παράγωγο στο  $x_0 = 2$  οδηγούμαστε στην σχέση  $a = \frac{\sqrt{5}}{10}$ . Οπότε τελικά βρίσκουμε τελικά  $b = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ .

**2)** Υπολογίστε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων

1.  $y(x) = x\sqrt{x}(3\ln x - 2)$

2.  $y(x) = e^{\sin^2(x^3)}$

3.  $y(x) = \sqrt{\frac{5-2x^2}{x^2+2}}$

**Λύση:**

1.  $y'(x) = \frac{9}{2}\sqrt{x}\ln x$

2.  $y'(x) = 3x^2 e^{\sin^2(x^3)} \sin(2x^3)$

3.  $y'(x) = \frac{-9x}{\sqrt{5-2x^2}(x^2+2)^{3/2}}$

**3)** Να υπολογιστεί η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος της καμπύλης με παραμετρικές εξισώσεις  $x(t) = 3t^2 + t + 1$  και  $y(t) = t^4 + 2t$ .

**Λύση:** Βρίσκουμε ότι  $\frac{dy}{dx} = \frac{4t^3 + 2}{6t + 1}$  και  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{48t^3 + 12t^2 - 12}{(6t + 1)^3}$ .

**4)** Να υπολογιστούν οι παράγωγοι

1.  $m(u) = \frac{m_o}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$

όπου  $m_o, c$  είναι σταθερές.

2. Να υπολογισθεί ο τύπος της παραγώγου  $(d^n f(x)/dx^n)$  της συνάρτησης

$$y = 1/(x + 1)$$

**Λύση:**

1.  $\frac{dm}{du} = \frac{m_o u}{c^2 [1-u^2/c^2]^{3/2}}$

2.  $y = (x + 1)^{-1}$

$$\frac{dy}{dx} = -(x + 1)^{-2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (-1)(-2)(x + 1)^{-3}$$

$\vdots$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^n (n!) (x + 1)^{-n-1}$$

**5)**

1. Αν  $a > 0$  και σταθερά. Να υπολογισθεί το  $k > 0$  σαν συνάρτηση του  $a$  αν οι συναρτήσεις  $y = \sin(kx)$  και  $y = \cos(kx)$  ικανοποιούν την εξίσωση

$$\frac{d^2y}{dx^2} + ay = 0 \tag{1}$$

2. Δείξτε ότι  $y = c_1 \sin(kx) + c_2 \cos(kx)$  είναι επίσης λύσεις της εξίσωσης 1, για κάθε σταθερά  $c_1$  και  $c_2$ .

3. Δείξτε ότι η συνάρτηση  $y = \sin(kx + \phi)$  επίσης ικανοποιεί την εξίσωση 1 για κάθε τιμή της  $\phi$ .

4. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$y = c_1 \sin(kx) + c_2 \cos(kx)$$

μπορεί να πάρει τη μορφή  $y = \sin(kx + \phi)$

**Λύση:**

1.  $(\sin(kx))' = k \cos(kx)$ . Επομένως

$$(\sin(kx))'' = (k \cos(kx))' = -k^2 \sin(kx).$$

Ομοίως, διαφοροποιώντας το συνημίτονο δύο φορές με μία αλλαγή προσήμου έχουμε

$$(\cos(kx))'' = -k^2 \cos(kx)$$

Επομένως,

$$\sin(kx)'' + k^2 \sin(kx) = 0$$

και

$$\cos(kx)'' + k^2 \cos(kx) = 0$$

Εάν υποθέσουμε  $k > 0$ ,  $k = \sqrt{a}$ .

2. Αυτό προκύπτει από την γραμμικότητα της λειτουργίας της διαφοροποίησης. Με  $k^2 = a$ , προκύπτει

$$(c_1 \sin(kx) + c_2 \cos(kx))'' + k^2(c_1 \sin(kx) + c_2 \cos(kx)) \quad (2)$$

$$= c_1(\sin(kx))'' + c_2(\cos(kx))'' + k^2 c_1 \sin(kx) + k^2 c_2 \cos(kx) \quad (3)$$

$$= c_1[(\sin(kx))'' + k^2 \sin(kx)] + c_2[(\cos(kx))'' + k^2 \cos(kx)] \quad (4)$$

$$= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0 \quad (5)$$

3. Εφόσον το  $\phi$  είναι σταθερό,  $d(kx + \phi)/dx = k$  και  $(\sin(kx + \phi))' = k \cos(kx + \phi)$ ,

$$(\sin(kx + \phi))'' = (k \cos(kx + \phi))' = -k^2 \sin(kx + \phi)$$

Επομένως, αν  $a = k^2$ ,

$$(\sin(kx + \phi))'' + a \sin(kx + \phi) = 0$$

4. Ο τύπος αθροίσματος για τις λειτουργίες ημιτόνου λέει

$$\sin(kx + \phi) = \sin(kx) \cos(\phi) + \cos(kx) \sin(\phi)$$

Με άλλα λόγια

$$\sin(kx + \phi) = c_1 \sin(kx) + c_2 \cos(kx)$$

με  $c_1 = \cos(\phi)$  και  $c_2 = \sin(\phi)$ .

**6)** Αν η εφαπτομένη της καμπύλης  $y = (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2$ , με  $a = \text{σταθερό}$  και  $x > 0$ , τέμνει τους άξονες  $Ox$  και  $Oy$  στα σημεία  $A$  και  $B$  αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι το άθροισμα  $(OA) + (OB)$  είναι σταθερό.

**Λύση:** Η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο τυχαίο σημείο  $M(x_0, y_0)$  είναι

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y - (\sqrt{a} - \sqrt{x_0})^2 = \left(1 - \sqrt{\frac{a}{x_0}}\right)(x - x_0) \quad (6)$$

Για να βρούμε το τμήμα  $OA$  θέτουμε στην 6  $y = 0$  και έχουμε:

$$\begin{aligned} -a + 2\sqrt{ax_0} - x_0 &= (1 - \sqrt{\frac{a}{x_0}})(x - x_0) \Rightarrow \\ x &= \frac{x_0\sqrt{a} - a\sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0} - \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{ax_0}(\sqrt{x_0} - \sqrt{a})}{\sqrt{x_0} - \sqrt{a}} = \sqrt{ax_0} \end{aligned}$$

επομένως για το τυχαίο σημείο  $M$  της καμπύλης είναι  $(OA) = \sqrt{ax_0}$ .

Για να βρούμε το τμήμα  $OB$  θέτουμε στη σχέση 6  $x = 0$  και έχουμε:

$$y - (\sqrt{a} - \sqrt{x_0})^2 = -x_0(1 - \sqrt{\frac{a}{x_0}}) \Rightarrow$$

$$y = a - 2\sqrt{ax_0} + x_0 - x_0 + \sqrt{ax_0} = a - \sqrt{ax_0}$$

Επομένως για το τυχαίο σημείο  $M$  της καμπύλης είναι

$$(OB) = a - \sqrt{ax_0}$$

Άρα  $(OA) + (OB) = \sqrt{ax_0} + a - \sqrt{ax_0} = a = \text{σταθερ.}$

# Ασκήσεις Γενικά Μαθηματικά Ι

## Λύσεις ασκήσεων Ομάδας 3

Λουκάς Βλάχος και Χάρης Σκόκος

**1)** Να υπολογιστούν τα όρια :

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sin x}$
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt[4]{2x^3 - x^2 + 5} - \sqrt[3]{8x^3 - 3x^2 + 2x - 5} \right)$

**Λύση:**

1. Έχουμε απροσδιοριστία  $\frac{0}{0}$ . Αν όμως πολλαπλασιάσουμε επί τη συζυγή παράσταση του αριθμητή, θα πάρουμε ότι:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2 + 1})^2 - 1}{\sin x (\sqrt{x^2 + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x}{\sin x} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} \right) = 1 \cdot 0 = 0$
2. Έχουμε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt[4]{2x^3 - x^2 + 5} - \sqrt[3]{8x^3 - 3x^2 + 2x - 5} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt[4]{x^4 \left( \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x^4} \right)} - \sqrt[3]{x^3 \left( 8 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{5}{x^3} \right)} \right) = \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} x \right) \left[ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt[4]{\left( \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x^4} \right)} - \sqrt[3]{\left( 8 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{5}{x^3} \right)} \right) \right] = (+\infty)(0-2) = -\infty$

**2)** Να υπολογίσετε την δεύτερη παράγωγο  $f''(x)$  της συνάρτησης  $f(x) = x^m \cos(nx)$ , όπου  $m, n$  μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί και στην συνέχεια τις τιμές  $f'(0)$ ,  $f''(0)$ ,  $f'(\pi)$ ,  $f''(\pi)$ .

**Λύση:**  $f'(x) = mx^{m-1} \cos(nx) - nx^m \sin(nx)$ . Ειδικότερα, για  $m = 1$  έχουμε  $f'(x) = \cos(nx) - nx \sin(nx)$ .

$f''(x) = m(m-1)x^{m-2} \cos(nx) - 2mnx^{m-1} \sin(nx) - n^2 x^m \cos(nx)$  Ειδικότερα, για  $m = 1$  έχουμε  $f''(x) = -2n \sin(nx) - n^2 x \cos(nx)$  και για  $m = 2$   $f''(x) = 2 \cos(nx) - 4xn \sin(nx) - n^2 x^2 \cos(nx)$ .

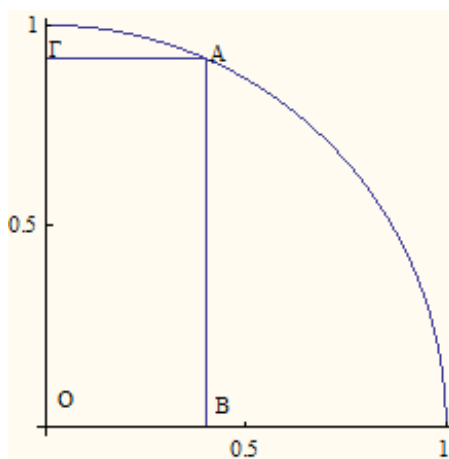
Από τα παραπάνω έχουμε:  $f'(0) = 1$  αν  $m = 1$ , ενώ αν  $m > 1$   $f'(0) = 0$ . Επίσης  $f'(\pi) = m\pi^{m-1}(-1)^n$ .

$f''(0) = 0$  αν  $m = 1$ ,  $f''(0) = 2$  αν  $m = 2$ , ενώ αν  $m > 2$   $f'(0) = 0$ . Επίσης  $f''(\pi) = (-1)^n[m(m-1)\pi^{m-2} - n^2\pi^m]$ .

**3)** Σε ορθοκανονικό σύστημα  $Oxy$  θεωρούμε σημείο  $A$  στο πρώτο τεταρτημόριο του μοναδιαίου κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων και τις προβολές αυτού  $B$  και  $\Gamma$  στους άξονες των  $x$  και  $y$  αντίστοιχα. Να βρεθεί η θέση του  $A$  ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου  $ABO\Gamma$  να είναι μέγιστο.

**Λύση:** Το εμβαδόν  $E$  του ορθογωνίου  $ABO\Gamma$  ισούται με  $E = xy$  και, καθώς  $x^2 + y^2 = 1$  και  $x, y$  μη αρνητικά, παίρνει την μορφή  $E(x) = x\sqrt{1-x^2}$  (δες σχήμα 1). Θέλουμε λοιπόν να μεγιστοποιήσουμε την συνάρτηση  $E(x) = x\sqrt{1-x^2}$  στο διάστημα  $[0, 1]$ . Η πρώτη παράγωγος της  $E(x)$  στο διάστημα  $(0, 1)$  είναι  $E'(x) = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(1-\sqrt{2}x)(1+\sqrt{2}x)}{\sqrt{1-x^2}}$ .

Εύκολα φαίνεται ότι η συνάρτηση έχει ολικό μέγιστο στο σημείο  $x = \sqrt{2}/2$  την τιμή  $E(\sqrt{2}/2) = 1/2$ . Δηλαδή το ορθογώνιο έχει μέγιστο εμβαδόν όταν γίνεται τετράγωνο.



Σχήμα 1: Το σχήμα της άσκησης 3.

**4)** Ένα σωματίδιο κινείται πάνω σε μια οριζόντια γραμμή σύμφωνα με την εξίσωση

$$x(t) = t^4 - 10t^3 + 36t^2 - 56t + 1$$

Υπολογίστε (α) πότε αυξάνει και πότε ελαττώνει το μέτρο της ταχύτητας, (β) πότε αλλάζει η κατεύθυνση της κίνησης, (γ) η συνολική απόσταση που διανύθηκε τα πρώτα  $4\text{sec}$ .

**Λύση:** α) Η θέση του σωματιδίου την χρονική στιγμή  $t$  δίνεται από τη συνάρτηση

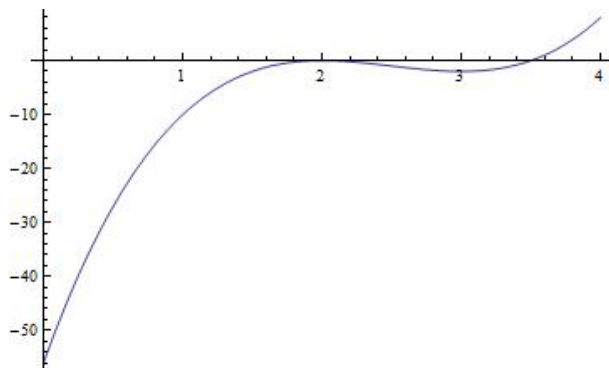
$$x(t) = t^4 - 10t^3 + 36t^2 - 56t + 1,$$

η ταχύτητα του σωματιδίου είναι

$$u(t) = x'(t) = 4t^3 - 30t^2 + 72t - 56,$$

και η επιτάχυνση  $a(t) = u'(t) = 12t^2 - 60t + 72$ . Θεωρούμε ως θετική φορά την προς τα δεξιά κίνηση.

Το μέτρο της ταχύτητας αυξάνει όταν η ταχύτητα και η επιτάχυνση έχουν το ίδιο πρόσημο δηλαδή  $\vec{u} \nearrow \nearrow \vec{a}$  και μειώνεται όταν η ταχύτητα και η επιτάχυνση έχουν αντίθετο πρόσημο δηλαδή  $\vec{u} \nearrow \searrow \vec{a}$ . Η ταχύτητα του μηδενίζεται τις χρονικές στιγμές  $t = 2s, 3.5s$ . Επομένως η ταχύτητα ελαττώνεται από  $0 - 2 \text{ sec}$  και από  $3 - 3.5 \text{ sec}$  ενώ αυξάνεται από  $2 - 3 \text{ sec}$  και από  $3.5 \text{ sec}$  και έπειτα.



Σχήμα 2: Η ταχύτητα σαν συνάρτηση του χρόνου

(β) Η κατεύθυνση της κίνησης αλλάζει όταν αλλάζει πρόσημο η ταχύτητα. Άρα η κατεύθυνση της κίνησης αλλάζει την χρονική στιγμή  $t = 3, 5 \text{ sec}$ .

(γ) Θεωρώντας ότι το κινητό ξεκινάει την κίνησή του την  $t = 0$ , εκείνη τη στιγμή βρίσκεται στη θέση  $x(0) = 1$  μονάδα μήκους και έχει  $u(0) = -56$  μονάδες ταχύτητας. Στη συνέχεια κινείται προς τα αρνητικά του άξονα μέχρι την  $t = 3, 5 \text{ sec}$  όπου στιγμιαία σταματάει να κινείται και αλλάζει φορά κίνησης. Την  $t = 3, 5 \text{ sec}$  βρίσκεται στη θέση  $x(3, 5) = -32, 6875$  μονάδες μήκους. Εκείνη τη στιγμή αλλάζει φορά κίνησης και κινείται προς τα θετικά. Έτσι την  $t = 4 \text{ sec}$  βρίσκεται στη θέση  $x(4) = -31$  μονάδες μήκους.

Άρα συνολικά έχει διανύσει διάστημα

$$S_{ol} = x(0) + |x(3, 5)| + |x(4) - x(3, 5)| = 1 + 32, 6875 + (-31 + 32, 6875) = 33, 6875 + 1, 6875 = 35, 375$$

**5)** Δίνεται η συνάρτηση

$$y = x^{1/2}(x+1)^{1/3}(x-1)^{2/3}.$$

Να προσδιοριστεί η παράγωγος  $dy/dx$ .

**Λύση:**

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2}x(x+1)^{1/3}(x-1)^{2/3} + x^{1/2}\frac{1}{3}(x+1)^{-2/3}(x-1)^{2/3} + x^{1/2}(x+1)^{1/3}\frac{2}{3}(x-1)^{-1/3} = \\ &= \frac{9x^2-3+2x}{6(x-1)^{1/3}\sqrt{x}(1+x)^{2/3}}\end{aligned}$$

**6)** Έστω ότι  $x = t + 1/t$  και  $y = t^2 + 1/t^2$ . Να αποδειχθεί ότι η δεύτερη παράγωγος  $d^2y/dx^2$  είναι σταθερή και να προσδιοριστεί η παράσταση

$$K = (x^2 - 4) \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - 4y.$$

**Λύση:** Η δεύτερη παράγωγος υπολογίζεται από τη σχέση

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)}{dx} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) - \left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}$$

$$\text{Άρα } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2(t^6 - 3t^4 + 3t^2 - 1)}{(t^2 - 1)^3} = 2$$

$$\text{Άρα η δεύτερη παράγωγος είναι σταθερή. Επίσης } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t - \frac{2}{t^3}}{1 - \frac{1}{t^2}} = \frac{2t^4 - 2}{t^3 - t}$$

$$\text{Άρα } K = (x^2 - 4) \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - 4y = \left(t^2 - 2 + \frac{1}{t^2}\right) 2 + \left(t + \frac{1}{t}\right) \left(\frac{2t^4 - 2}{t^3 - t}\right) - 4t^2 - \frac{4}{t^2} = 0$$

# Ασκήσεις Γενικά Μαθηματικά Ι

## Λύσεις ασκήσεων Ομάδας 4

Λουκάς Βλάχος και Χάρης Σκόκος

**1)** Να υπολογιστούν τα όρια:

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} \right)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -3} (x + 3) \sqrt{\frac{-2x}{x^2 + 6x + 9}}$$

**Λύση:**

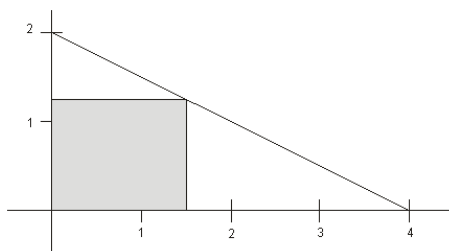
1. Έχουμε απροσδιοριστία  $\infty - \infty$ . Η άσκηση λοιπόν λύνεται με το γνωστό τέχνασμα του πολλαπλασιασμού και διαίρεσης της παράστασης με την συζυγή της, οπότε με απλές πράξεις βρίσκουμε:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x - \sqrt{x}}} =$   
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} + \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}}} = 1$
2. Έχουμε απροσδιοριστία  $\frac{0}{0}$ . Παρατηρώντας ότι  $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$ , η συνάρτησή μπορεί να γραφεί και ως εξής:  $(x + 3) \sqrt{\frac{-2x}{x^2 + 6x + 9}} = \frac{(x+3)\sqrt{-2x}}{|x+3|}$ . Υπολογίζουμε τα πλευρικά όρια και βρίσκουμε εύκολα ότι  $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{(x+3)\sqrt{-2x}}{|x+3|} = \sqrt{6}$ ,  $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{(x+3)\sqrt{-2x}}{|x+3|} = -\sqrt{6}$ . Επομένως αφού τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά δεν υπάρχει το ζητούμενο όριο.

**2)** Ένα εργοστάσιο μπορεί να κατασκευάσει  $x$  εκατοντάδες λάστιχα τύπου Α και  $y$  εκατοντάδες λάστιχα τύπου Β την ημέρα όπου  $0 \leq x \leq 4$  και  $y = \frac{40 - 10x}{5 - x}$ . Το κέρδος ανά λάστιχο τύπου Α είναι διπλάσιο από το κέρδος ανά λάστιχο τύπου Β. Ποιος είναι ο ιδανικός αριθμός παραγωγής  $(x, y)$  ώστε να μεγιστοποιείται το συνολικό κέρδος;

**Λύση:** Εάν το κέρδος ανά λάστιχο τύπου Β είναι  $p$ , τότε το κέρδος ανά λάστιχο τύπου Α είναι  $2p$  και η συνάρτηση κέρδους γίνεται:  $P(x) = 2px + py = 2p \frac{20 - x^2}{5 - x}$ . Τα πιθανά ακρότατα μηδενίζουν την παράγωγο ή είναι σημεία στα οποία δεν ορίζεται η παράγωγος ή είναι άκρα του διαστήματος. Όμως,  $P'(x) = 2p \frac{(x - 5 + \sqrt{5})(x - 5 - \sqrt{5})}{(5 - x)^2}$  οπότε πιθανά ακρότατα είναι τα σημεία είναι τα  $x = 5 - \sqrt{5}$ ,  $x = 5 + \sqrt{5}$ . Αφού  $0 \leq x \leq 4$ , το μόνο σημείο που μας ενδιαφέρει είναι το  $x = 5 - \sqrt{5}$ . Παρατηρούμε ότι η παράγωγος είναι θετική για  $0 < x < 5 - \sqrt{5}$  (οπότε και η συνάρτηση είναι αύξουσα) και αρνητική για  $5 - \sqrt{5} < x < 4$  (οπότε και η συνάρτηση είναι φθίνουσα). Άρα, στο σημείο  $x = 5 - \sqrt{5}$  έχουμε τοπικό μέγιστο με  $P(5 - \sqrt{5}) = 4p(5 - \sqrt{5}) \approx 11,0557p$ . Στα άκρα του διαστήματος έχουμε  $P(0) = 8p$  και  $P(4) = 8p$ . Συμπεραίνουμε έτσι ότι το σημείο  $(5 - \sqrt{5}, P(5 - \sqrt{5}))$  είναι ολικό μέγιστο και η ζητούμενη λύση είναι  $x \approx 2,76$  και  $y \approx 5,53$  εκατοντάδες λάστιχα.

**3)** Δίδεται το τρίγωνο το οποίο σχηματίζεται από την τομή της ευθείας γραμμής  $y = -x/2 + 2$ , του άξονα των  $x$  και του άξονα των  $y$ . Βρείτε το εμβαδόν του μεγαλύτερου ορθογωνίου το οποίο δύναται να εγγραφεί εντός του δοθέντος τριγώνου.

**Λύση:** Αν ονομάσουμε  $(x, y)$  τις συντεταγμένες της κορυφής του σκιασμένου παραλληλόγραμμου που βρίσκεται πάνω στην υποτεινούσα του ορθογωνίου τριγώνου (δες σχήμα 1), τότε  $0 \leq x \leq 4$ , και είναι φανερό ότι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου μπορεί να γραφεί  $E = xy$ . Ξερσιμοποιώντας κατόπιν την σχέση  $y = -x/2 + 2$  γράφουμε το εμβαδόν αυτό ως μια συνάρτηση μόνο του  $x$  ως εξής:  $E(x) = x(-\frac{x}{2} + 2)$ . Ακολουθώντας παίρνουμε την παράγωγο της συνάρτησης, αναζητώντας τα ακρότατά της  $E'(x) = -x + 2$ . Εύκολα βρίσκουμε  $E'(2) = 0$ ,  $E''(2) = -1 < 0$ . Άρα το παραλληλόγραμμο με το μέγιστο εμβαδόν είναι αυτό που έχει πλευρές μήκους  $x = 2$  και  $y = 1$ , δηλ.  $E = 2$ .



Σχήμα 1: Το σχήμα της άσκησης 3.

**4)** Στη δοκιμή σύγκρουσης ενός αυτοκινήτου με εμπόδιο (*crashtest*), ένα αυτοκίνητο επιταχύνεται από ηρεμία με  $2m/s^2$  για 5 δευτερόλεπτα και μετά επιβραδύνεται με  $-4m/s^2$  μέχρι που συγκρούεται με το εμπόδιο. Η θέση του αυτοκινήτου δίνεται από τη συνάρτηση

$$s(t) = \begin{cases} t^2 & 0 < t < 5 \\ -2t^2 + At + B & t \geq 5 \end{cases}$$

(α) Υποθέτοντας ότι  $s(t)$  και  $s'(t)$  είναι συνεχείς συναρτήσεις τη χρονική στιγμή  $t = 5$ , υπολογίστε τα  $A$  και  $B$ .

(β) Το εμπόδιο είναι τοποθετημένο σε απόσταση  $s = 33$  μέτρα. Υπολογίστε την ταχύτητα του αυτοκινήτου όταν συγκρούεται με το εμπόδιο.

**Λύση:** (α) Επειδή η  $s(t)$  είναι συνεχής για  $t = 5$ , το αριστερό όριο και το δεξί όριο είναι ίσα. Το αριστερό όριο είναι,

$$\lim_{t \rightarrow 5^-} s(t) = \lim_{t \rightarrow 5^-} t^2 = 25.$$

Το δεξί όριο είναι,

$$\lim_{t \rightarrow 5^+} s(t) = \lim_{t \rightarrow 5^+} (-2t^2 + At + B) = -2(5)^2 + A(5) + B = -50 + 5A + B.$$

Αυτό οδηγεί στην εξίσωση,

$$25 = -50 + 5A + B,$$

η οποία απλοποιείται σε,

$$5A + B = 75.$$

Η παράγωγος  $s'(t)$  ισούται με,

$$s'(t) = \begin{cases} (t^2)' & 0 \leq t < 5 \\ (-2t^2 + At + B)' & t > 5 \end{cases}$$

το οποίο ισούται με,

$$s'(t) = \begin{cases} 2t & 0 \leq t < 5 \\ -4t + A & t > 5 \end{cases}$$

Επειδή η  $s'(t)$  είναι συνεχής στο  $t = 5$ , το αριστερό όριο και το δεξί όριο είναι ίσα. Το αριστερό όριο είναι,

$$\lim_{t \rightarrow 5^-} s'(t) = \lim_{t \rightarrow 5^-} 2t = 2(5) = 10.$$

Το δεξί όριο είναι,

$$\lim_{t \rightarrow 5^+} s'(t) = \lim_{t \rightarrow 5^+} (-4t + A) = -4(5) + A = -20 + A.$$

Αυτό οδηγεί στην εξίσωση,

$$10 = -20 + A,$$

η οποία απλοποιείται σε,

$$A = 30.$$

Αντικαθιστώντας με  $A = 30$  στην πρώτη εξίσωση έχουμε,

$$5(30) + B = 75,$$

το οποίο απλοποιείται σε,

$$B = 75 - 5(30) = 75 - 150 = -75.$$

Άρα η λύση είναι,

$$A = 30, \quad B = -75.$$

(β) Για  $t > 5$ , η εξίσωση για τη μετατόπιση είναι,

$$s(t) = -2t^2 + 30t - 75.$$

Η στιγμή  $T$  όταν το αυτοκίνητο χτυπάει στο εμπόδιο είναι η λύση της εξίσωσης  $s(T) = 33$ ,

$$-2T^2 + 30T - 75 = 33.$$

Αφαιρώντας το 33 από κάθε μέρος της εξίσωσης έχουμε,

$$-2T^2 + 30T - 108 = 0.$$

Διαιρώντας κάθε μέρος με  $-2$  έχουμε,

$$T^2 - 15T + 54 = 0.$$

Το κλάσμα 54 αναλυεται ως  $2 \times 27$ ,  $3 \times 18$  και  $6 \times 9$ . Στην τελευταία περίπτωση, το άθροισμα των παραγόντων είναι  $+15$ . Έτσι οι παράγοντες του πολυώνυμου γράφονται ως εξής,

$$T^2 - 15T + 54 = (T - 6)(T - 9).$$

Οι δύο πιθανές λύσεις του  $(T - 6)(T - 9) = 0$  είναι οι  $T = 6$  και  $T = 9$ . Από τη στιγμή που το αυτοκίνητο δε γίνεται να συγκρουστεί δύο φορές, συγκρούεται τη στιγμή,

$$T = 6.$$

Για  $t > 5$ , η εξίσωση  $u(t) = s'(t)$  είναι,

$$s'(t) = -4t + A = -4t + 30.$$

Αντικαθιστώντας για  $t = T = 6$  παίρνουμε,

$$s'(6) = -4(6) + 30.$$

Επομένως, τη στιγμή που το αυτοκίνητο συγκρούεται με το εμπόδιο, η ταχύτητα είναι,

$$6m/s.$$

**5)** Να υπολογισθούν οι παράγωγοι (παρουσιάστε αναλυτικά τις πράξεις)

$$(α) \frac{d}{d\theta} \left[ \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \right]$$

$$(β) \frac{d}{dt} \sqrt{1 - \sin^2(2t)}$$

**Λύση:** (α) Η απλούστερη λύση χρησιμοποιεί τον τύπο της διπλής γωνίας για  $\tan(\theta)$ . Επειδή  $\sin(2\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta)$  και  $\cos(2\theta) = \cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2$ , το  $\tan(2\theta)$  ισούται με,

$$\tan(2\theta) = \frac{\sin(2\theta)}{\cos(2\theta)} = \frac{2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{\cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2}.$$

Ο παράγοντας  $\cos(\theta)^2$  και στον αριθμητή και στον παρονομαστή οδηγεί στο,

$$\tan(2\theta) = \frac{2 \sin(\theta) / \cos(\theta)}{1 - (\sin(\theta) / \cos(\theta))^2} = \frac{2 \tan(\theta)}{1 - \tan(\theta)^2}.$$

Αυτό οδηγεί στο

$$\frac{d}{d\theta} \left( \frac{2 \tan(\theta)}{1 - \tan(\theta)^2} \right) = \frac{d}{d\theta} \tan(2\theta).$$

Αντικαθιστούμε το  $2\theta$  με  $u$ ,

$$\frac{d}{d\theta} \tan(u) \frac{d \tan(u)}{du} \frac{du}{d\theta} = \sec(u)^2 2.$$

Επομένως,

$$\frac{d}{d\theta} \left( \frac{2 \tan(\theta)}{1 - \tan(\theta)^2} \right) = 2 \sec(2\theta)^2.$$

Ορίζουμε  $v = \tan(\theta)$  και  $w = 2v/(1 - v^2)$  και έχουμε,

$$\frac{dw}{d\theta} = \frac{dw}{dv} \frac{dv}{d\theta}$$

$$\frac{dw}{dv} = \frac{1}{(1 - v^2)^2} ((2v)'(1 - v^2) - (2v)(1 - v^2)') = \frac{1}{(1 - v^2)^2} (2(1 - v^2) - 2v(-2v)) = \frac{2(1 + v^2)}{(1 - v^2)^2}.$$

Επίσης,

$$\frac{d}{d\theta} \tan(\theta) = \sec(\theta)^2.$$

Σύμφωνα με τα προηγούμενα

$$\frac{dw}{d\theta} = \frac{2(1 + v^2)}{(1 - v^2)^2} \sec(\theta)^2 = \frac{2(1 + \tan(\theta)^2) \sec(\theta)^2}{(1 - \tan(\theta)^2)^2}.$$

Εφόσον  $1 + \tan(\theta)^2$  ισούται με  $\sin(\theta)^2$ , αυτό απλοποιείται σε,

$$\frac{d}{dw} \left( \frac{2 \tan(\theta)}{1 - \tan(\theta)^2} \right) = 2 \sec(\theta)^4 / (1 - \tan(\theta)^2)^2.$$

$$(\beta) \frac{d}{dt} \sqrt{1 - \sin^2(2t)} = -\frac{2 \sin(2t) \cos(2t)}{\sqrt{1 - \sin^2(2t)}}$$

**6)** Να υπολογισθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

$$(\alpha) f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$(\beta) f(x) = \sqrt{1 + x^{1234}}$$

$$(\gamma) f(x) = \log_{10}(x^3 + 3x)$$

(δ) Να υπολογισθεί η παράγωγος  $x'(y)$  στο σημείο  $y = 0$  που ορίζεται από την πεπλεγμένη συνάρτηση

$$yx^x + x - 1 = 0$$

**Λύση:** (α) Αν θέσουμε  $u = e^x - e^{-x}$ ,  $v = e^x + e^{-x}$  τότε  $y = u/v$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{v^2} \left( \frac{du}{dx} v - u \frac{dv}{dx} \right).$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{v^2} (v^2 - u^2)$$

$$v^2 - u^2 = 4$$

και καταλήγουμε στη σχέση

$$\frac{dy}{dx} = 4/(e^x - e^{-x})^2$$

(b) Αν υποθέσουμε ότι  $u = x^{1234}$  και  $v = 1 + u$  τότε  $y = v^{1/2}$ .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \frac{dv}{du} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = 1234x^{1233}, \frac{dv}{du} = 1, \frac{dy}{dv} = \frac{1}{2}v^{-1/2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 617x^{1233}/\sqrt{1 + x^{1234}}.$$

(c) Επειδή  $x^3 + 3x = x(x^2 + 3)$  και

$$\log_{10}(x(x^2 + 3)) = \log_{10}(x) + \log_{10}(x^2 + 3)$$

$$(\log_{10}(x))' = \frac{1}{\ln(10)x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln(10)x} + \frac{2x}{\ln(10)(x^2 + 3)}$$

$$(d) \ yx^x + x - 1 = 0 \Rightarrow ye^{x \ln x} + x - 1 = 0$$

$$x^x + yx^x(x' \ln x + x') + x' = 0$$

$$x' = \frac{-x^x}{yx^x \ln(x) + yx^x + 1}$$

εφόσον

$$yx^x \ln(x) + yx^x + 1 \neq 0$$

Από την αρχική εξίσωση έχουμε για  $y = 0, x = 1$  άρα

$$x'(0) = -1.$$

# Ασκήσεις Γενικά Μαθηματικά Ι

## Λύσεις ασκήσεων Ομάδας 5

Λουκάς Βλάχος και Χάρης Σκόκος

**1)** Να υπολογιστούν τα όρια:

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2 \ln x)$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - e^x + e^{-x}}{x - \sin x}$

**Λύση:**

1. Έχουμε απροσδιοριστία  $\infty - \infty$ .  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2 \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x \left( 1 - \frac{2 \ln x}{x} \right) \right] =$   
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{2 \ln x}{x} \right) = +\infty(1 - 0) = +\infty$ , αφού  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \left( \frac{+\infty}{+\infty} \right) =$   
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - e^x + e^{-x}}{x - \sin x} \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x - e^x + e^{-x})'}{(x - \sin x)'} =$   
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - e^x - e^{-x}}{1 - \cos x} \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 - e^x - e^{-x})'}{(1 - \cos x)'} =$   
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x + e^{-x}}{\sin x} \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-e^x + e^{-x})'}{(\sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x - e^{-x}}{\cos x} = \frac{-1 - 1}{1} = -2$

**2)** Να βρεθεί η παράμετρος  $\alpha$  έτσι ώστε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+2\alpha} - \sqrt{2x+\alpha}}{x^2 - 5x + 6}$  να υπάρχει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Στη συνέχεια να το υπολογίσετε.

**Λύση:** Παρατηρούμε ότι:  $\lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x+2\alpha} - \sqrt{2x+\alpha}) = \sqrt{3+2\alpha} - \sqrt{6+\alpha}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 5x + 6 = 0$ . Έτσι, αν  $\sqrt{3+2\alpha} - \sqrt{6+\alpha} \neq 0$  το τελικό αποτέλεσμα θα ήταν  $\pm\infty$ . Πρέπει, συνεπώς  $\sqrt{3+2\alpha} - \sqrt{6+\alpha} = 0 \Rightarrow \alpha = 3$ . Για αυτήν την τιμή του  $\alpha$  έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{2x+3}}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+6} - \sqrt{2x+3})(\sqrt{x+6} + \sqrt{2x+3})}{(x^2 - 5x + 6)(\sqrt{x+6} + \sqrt{2x+3})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x-3)}{(x-3)(x-2)(\sqrt{x+6} + \sqrt{2x+3})} = -\frac{1}{6}.$$

**3)** Να προσδιοριστούν τα  $a, b \in \mathbb{R}$ , ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax + b \sin(2x)}{x}, & \text{αν } x < 0 \\ a - 4, & \text{αν } x = 0 \\ \frac{2 - \sqrt{4+x}}{bx}, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

να είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ .

**Λύση:** Για να είναι η  $f(x)$  συνεχής στο  $x_0 = 0$  θα πρέπει  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) =$   
 $a - 4$ . Επίσης, έχουμε:  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax + b \sin(2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} a + 2b \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(2x)}{2x} =$   
 $a + 2b$ , και  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 - \sqrt{4+x}}{bx} \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(2 - \sqrt{4+x})(2 + \sqrt{4+x})}{bx(2 + \sqrt{4+x})} =$   
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{bx(2 + \sqrt{4+x})} = -\frac{1}{4b}$ . Επομένως θα πρέπει  $a + 2b = a - 4 \Rightarrow b = -2$ ,  $-\frac{1}{4b} =$   
 $a - 4 \Rightarrow a = \frac{33}{8}$ .

**4)** Η συνάρτηση  $f(x)$  ορίζεται από τη σχέση

$$f(x) = \begin{cases} (1 + \sin x) / (\cos(x)) & \text{αν } \cos(x) \neq 0 \\ 0, & \text{αν } \cos(x) = 0 \end{cases}$$

Για  $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ . Σχεδιάστε την καμπύλη  $y = f(x)$ .

**Λύση:**

Από τη στιγμή που η εξίσωση  $y = f(x)$  είναι περιοδική με περίοδο  $2\pi$ , αρκεί μόνο να κάνουμε την ανάλυση για  $[0, 2\pi]$ .

(i) Οι κάθετες ασύμπτωτες ίσως τοποθετούνται όπου  $\cos x = 0$ , το οποίο συμβαίνει για  $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$  στο  $[0, 2\pi]$ .

Εφόσον  $1 + \sin x \neq 0$  για  $x = \frac{\pi}{2}$ , αυτή είναι μία κάθετη ασύμπτωτη. Από την άλλη,  $1 + \sin x = 0$  για  $x = \frac{3\pi}{2}$ , επομένως αυτό το σημείο χρειάζεται επιπλέον ανάλυση.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{1 + \sin x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{\cos x}{-\sin x} = 0$$

Επομένως δεν υπάρχει ασύμπτωτη στο  $x = \frac{3\pi}{2}$  όπου η εξίσωση είναι συνεχής.

(ii) Από τη μελέτη της πρώτης παραγώγου έχουμε

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x + (1 + \sin x) \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1 + \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{1 - \sin x}.$$

Επομένως η  $f$  είναι μη φθίνουσα και δεν υπάρχουν τοπικά ακρότατα.

(iii)

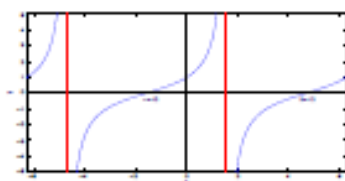
Σύμφωνα με την

$$f''(x) = \frac{\cos x}{(1 - \sin x)^2}$$

η οποία αλλάζει πρόσημο κάθε φορά που  $\cos x = 0$  το οποίο συμβαίνει στο  $x = \frac{\pi}{2}$  και  $\frac{3\pi}{2}$ . Ωστόσο, υπάρχει μία κάθετη ασύμπτωτη στο  $x = \frac{\pi}{2}$ , επομένως το μόνο σημείο καμπής παρουσιάζεται όταν  $x = \frac{3\pi}{2}$ . Οι συνεταγμένες του σημείου δίνονται από το  $(\frac{3\pi}{2}, 0)$ . Η κλίση στο σημείο καμπής είναι  $f'(\frac{3\pi}{2}) = 1/2$ .

(iv)

Η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα πάνω όταν  $\cos x > 0$  και τα κοίλα κάτω όταν  $\cos x < 0$ . Για να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση, σχεδιάζουμε πρώτα το σημείο  $0 \leq x \leq 2\pi$ , και έπειτα την επεκτείνουμε περιοδικά στο  $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ , βλ. το παρακάτω σχήμα.



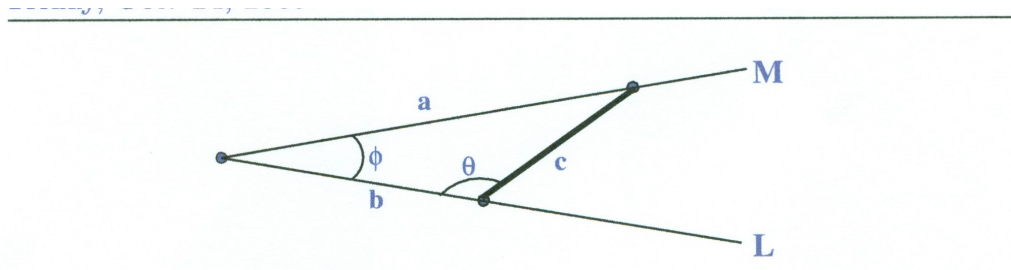
**5)** Δύο ακτίνες  $L, M$  (βλέπε σχήμα) συναντιούνται σε ένα σημείο σχηματίζοντας σταθερή γωνία  $\phi$ . Μία ράβδος με σταθερό μήκος  $c$  κινείται με τη μία άκρη να παραμένει στην ακτίνα  $L$  και η άλλη άκρη στην  $M$ . Να υπολογισθούν τα  $a, b, \theta$  σαν συνάρτηση των σταθερών  $c, \phi$  όταν το  $b$  γίνεται μέγιστο.

**Λύση:**

Ξεκινάμε με τον κανόνα των συνημιτόνων:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \phi \quad (1)$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε το  $b$  ως συνάρτηση του  $a$ : Στην πραγματικότητα υπάρχουν δύο τέτοιες συναρτήσεις, ωστόσο τα μέγιστα που παρουσιάζουν είναι τα ίδια και στο ίδιο



σημείο. Διαφορίζοντας την 1 ως προς το  $a$ , παίρνουμε

$$0 = 2a + 2b \frac{db}{da} - 2b \cos \phi - 2a \frac{db}{da} \cos \phi$$

Για  $b = b(a)$ , αναζητώντας τα ακρότατα έχουμε  $\frac{db}{da} = 0$ . Επομένως

$$0 = 2a - 2b \cos \phi \Rightarrow a = b \cos \phi$$

Συνδέοντας αυτό με την 1, παίρνουμε

$$c^2 = b^2(\cos^2 \phi + 1) - 2b^2 \cos \phi = b^2(1 - \sin^2 \phi) = b^2 \sin^2 \phi$$

επομένως το μέγιστο  $b$  είναι

$$b = \frac{c}{\sin \phi} \quad (2)$$

και ισχύει

$$a = b \cos \phi = c \cot \phi$$

Επιπλέον πρέπει να βρούμε μία σχέση για το  $\theta$  όταν το  $b$  είναι μέγιστο. Ονομάζουμε  $A$  την αντίστοιχη γωνία στην κορυφή  $b$  του τριγώνου  $abc$ , έπειτα σύμφωνα με το θεώρημα των ημιτόνων έχουμε

$$\frac{b}{\sin A} = \frac{c}{\sin \phi}$$

Σύμφωνα με την 2 αυτό σημαίνει ότι  $\sin A = 1$  και ως εκ τούτου  $A = \pi/2$ . Από τη σχέση  $\phi + \theta + A = \pi$ , βρίσκουμε ότι

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \phi$$

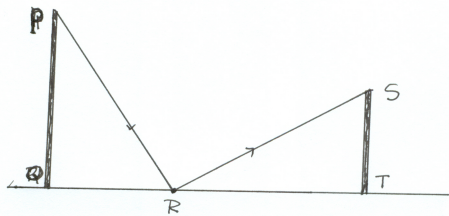
στην περίπτωση που το  $b$  είναι μέγιστο.

# Ασκήσεις Γενικά Μαθηματικά Ι

## Λύσεις ασκήσεων Ομάδας 6

Λουκάς Βλάχος και Χάρης Σκόκος

**1)** Δύο κατακόρυφοι στύλοι  $QP, ST$  στηρίζονται από δύο δοκούς  $PRS$  (βλέπε Σχήμα 1). Να υπολογισθούν οι γωνίες  $\theta_1 = \widehat{PRQ}, \theta_2 = \widehat{SRT}$  για να είναι το μήκος των δοκών ελάχιστο.



Σχήμα 1:

**Λύση:** Αν ορίσουμε  $PQ = a, ST = b$ , το  $QT = d$  και το  $RQ = x$  θα έχουμε

$$f(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d - x)^2}.$$

Η πρώτη παράγωγος  $f'(x)$  είναι ίση με μηδέν όταν

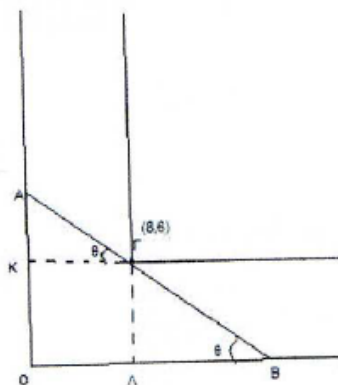
$$x_1 = \left( \frac{ad}{a+b} \right) = \frac{d}{1 + (b/a)}$$

στο σημείο αυτό η δεύτερη παράγωγος είναι θετική άρα  $f(x_1) = \text{ελάχιστο}$ . Ένας διαφορετικός τρόπος λύσης είναι με τις γωνίες  $\theta_1 = \widehat{PRQ}$  και  $\theta_2 = \widehat{SRT}$ . Διαπιστώνουμε ότι το ελάχιστο παρουσιάζεται όταν  $\theta_1 = \theta_2 = \tan^{-1}[(a+b)/d]$ .

**2)** Ένας μεταλλικός αγωγός πρέπει να μεταφερθεί από τον όροφο μιας πολυκατοικίας στο ισόγειο. Οι διάδρομοι της πολυκατοικίας είναι κάθετοι μεταξύ τους και έχουν πλάτος 8 μέτρα και 6 μέτρα αντίστοιχα. Να υπολογισθεί το μέγιστο μήκος του μεταλλικού αγωγού

(στρογγυλέψτε το στο πλησιέστερο ακέραιο) ώστε μπορούμε να το μεταφέρουμε στο ισόγειο από τον όροφο της πολυκατοικίας (πρόβλημα 14 σελίδα 301 στο βιβλίο *Thomas et al* βλέπε Σχήμα στη σελίδα 302).

**Λύση:**



Σχήμα 2:

**Λύση:** Το μήκος της σκάλας θα δίνεται από τη σχέση

$$L = A\Gamma + \Gamma B \Leftrightarrow L = \frac{K\Gamma}{\cos \theta} + \frac{\Lambda\Gamma}{\sin \theta} \Leftrightarrow L(\theta) = \frac{8}{\cos \theta} + \frac{6}{\sin \theta}$$

$$L'(\theta) = \frac{8 \sin \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{6 \cos \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{8 \sin^3 \theta - 6 \cos^3 \theta}{\cos^2 \theta \sin^2 \theta}$$

$$L'(\theta) = 0 \Leftrightarrow 8 \sin^3 \theta - 6 \cos^3 \theta = 0$$

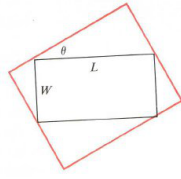
$$8 \sin^3 \theta = 6 \cos^3 \theta \Leftrightarrow \tan \theta = \frac{\sqrt[3]{6}}{2} \Leftrightarrow \theta = \arctan \left( \frac{\sqrt[3]{6}}{2} \right)$$

Επειδή  $\frac{\sqrt[3]{6}}{2} \sim 1 \Leftrightarrow \theta \sim \pi/4$

Άρα για  $\theta = \pi/4$   $L = \frac{8}{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{6}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 14\sqrt{2} = 19.799 \sim 20m$

**3)** (α) Να περιγράψετε γύρω από μια σφαίρα ακτίνας  $R$  ορθό κώνο, που να έχει τον ελάχιστο όγκο. (β) Να υπολογισθεί η μεγίστη επιφάνεια ορθογωνίου παραλληλογράμμου που μπορεί να εγγράψει γνωστό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκος  $L$  και πλάτος  $W$  (βλέπε Σχήμα 2).

**Λύση:** (α) Ο περιγεγραμμένος κώνος θα έχει, όπως φαίνεται και στο σχήμα, ύψος  $h = 2R + a$ , όπου  $a = AE > 0$  (μεταβλητό).



Σχήμα 3:

Επίσης επειδή τα τρίγωνα  $A\Delta\Gamma$  και  $AOB$  είναι όμοια θα ισχύει  $\frac{r}{2R+a} = \frac{R}{R+a}$  όπου  $r$  η ακτίνα του κώνου. Άρα  $r = \frac{(2R+a)R}{R+a}$

Ο όγκος του κώνου θα είναι:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \Leftrightarrow V(a) = \frac{1}{3}\pi \frac{(2R+a)^3 R^2}{(R+a)^2}$$

$$V'(a) = \frac{1}{3}\pi \frac{3(2R+a)^2 R^2 (R+a)^2 - 2(2R+a)^3 R^2 (R+a)}{(R+a)^4}$$

$$V'(a) = 0 \Leftrightarrow 3(2R+a)^2 R^2 (R+a)^2 - 2(2R+a)^3 R^2 (R+a) = 0 \Leftrightarrow (R+a)(2R+a)^2 R^2 [3(R+a) - 2(2R+a)] = 0 \Leftrightarrow$$

$$R = -a \text{ (απορρίπτεται)}$$

$$a = -R/2 \text{ (απορρίπτεται)}$$

$$3(R+a) - 2(2R+a) = 0 \Leftrightarrow a = R \text{ (δεκτή)}$$

Άρα στο  $R$  η συνάρτηση  $V(a)$  παρουσιάζει ακρότατο, το οποίο είναι ελάχιστο μιας και  $V''(a) = 1/3\pi \frac{6(aR^4+2R^5)}{(a+R)^4} > 0$

Συμπερασματικά, ο περιγεγραμμένος κώνος με τον ελάχιστο όγκο έχει ύψος  $h = 3R$  και  $r = \frac{(2R+R)R}{R+R} = \frac{3R^2}{2R} = (3/2)R$

(β) Το εγγεγραμμένο παραλληλόγραμμο  $EZH\Theta$  έχει μήκος  $L$  και πλάτος  $W$ , ενώ για το παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  στο οποίο το  $EZH\Theta$  εγγράφεται έχουμε:

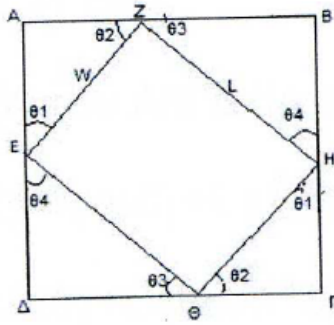
$$AB = AE + A\Delta = W \cos \theta_1 + L \cos \theta_4$$

και

$$\Gamma\Delta = \Delta\Theta + \Theta\Gamma = L \cos \theta_3 + W \cos \theta_2$$

Από το σχήμα έχουμε:

$$\theta_1 + \theta_4 = 90^\circ \quad \theta_2 + \theta_3 = 90^\circ \quad \theta_1 + \theta_2 = 90^\circ$$



Σχήμα 4:

Άρα  $\cos \theta_4 = \sin \theta_1$ ,  $\cos \theta_3 = \sin \theta_2$ ,  $\sin \theta_2 = \cos \theta_1$ ,  $\cos \theta_2 = \sin \theta_1$   
 Άρα για τις πλευρές έχουμε:

$$AB = W \cos \theta_1 + L \sin \theta_1$$

$$\Gamma\Delta = W \sin \theta_1 + L \cos \theta_1$$

Το εμβαδόν του  $AB\Gamma\Delta$  θα είναι:

$$E = AB\Gamma\Delta = (W \cos \theta_1 + L \sin \theta_1)(W \sin \theta_1 + L \cos \theta_1) =$$

$$W^2 \cos \theta_1 \sin \theta_1 + LW(\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1) + L^2 \cos \theta_1 \sin \theta_1 \Leftrightarrow$$

$$E(\theta) = (W^2 + L^2) \cos \theta \sin \theta + LW$$

$$E'(\theta) = (W^2 + L^2)[\cos^2 \theta - \sin^2 \theta]$$

$$E'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 0$$

και αφού  $\theta \in [0, \pi/2] \Leftrightarrow \cos \theta = \sin \theta \Leftrightarrow \theta = \pi/4$ .

Επίσης  $E''(\theta) = (W^2 + L^2)[-2 \cos \theta \sin \theta - 2 \cos \theta \sin \theta] < 0$

Οπότε το εμβαδόν για την τιμή  $\theta = \pi/4$  γίνεται μέγιστο ίσο με  $E = (W^2 + L^2)/2 + LW$

**4)** Έστω  $f(x)$  μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Η συνάρτηση  $g(x) = [f(x)]^2$  είναι γνησίως αύξουσα; Αν ναι αποδείξτε το. Αν όχι μπορείτε να βρείτε μια απλή συνθήκη που θα εξασφαλίζει ότι η  $g(x)$  είναι γνησίως αύξουσα;

**Λύση:** Αφού η  $f(x)$  είναι γνησίως αύξουσα θα ισχύει  $f'(x) > 0$ . Η πρώτη παράγωγος της  $g(x)$  είναι  $g'(x) = 2f(x)f'(x)$ . Είναι φανερό ότι η  $g'(x)$  δεν είναι πάντα θετική εκτός αν  $f(x) > 0$ . Για παράδειγμα η  $f(x) = x$  είναι γνησίως αύξουσα αλλά η  $g(x) = x^2$  δεν είναι γιατί η  $f(x)$  δεν είναι παντού θετική. Αντίθετα η  $f(x) = e^x$  είναι γνησίως αύξουσα και η

$g(x) = e^{2x}$  είναι επίσης γνησίως αύξουσα αφού η  $f(x)$  είναι θετική. Επομένως η συνθήκη  $f(x) > 0$  είναι αρκετή για να μας εξασφαλίσει ότι η  $g(x)$  είναι γνησίως αύξουσα.

**5)** Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα παράθυρο η βάση του οποίου θα έχει το σχήμα παραλληλογράμμου και η κορυφή του θα είναι ένα ημικύκλιο όπως φαίνεται στο σχήμα 5. Αν η περίμετρος του παραθύρου είναι 12 μέτρα να βρεθούν οι διαστάσεις του ώστε να μπαίνει από αυτό όσο το δυνατόν περισσότερο φως.

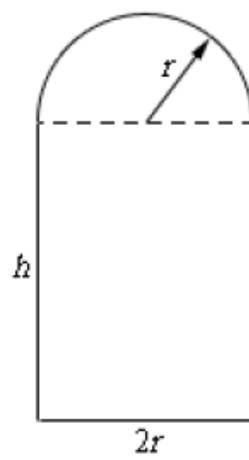


Σχήμα 5: Το σχήμα της άσκησης 5.

**Λύση:** Αν  $r$  η ακτίνα του ημικυκλίου και  $h$  το ύψος του παραθύρου (βλέπε σχήμα 6), θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε την επιφάνεια  $E = 2hr + \pi r^2/2$  του παραθύρου και ταυτόχρονα να έχουμε  $12 = 2h + 2r + \pi r$ . Εκφράζουμε το εμβαδό ως συνάρτηση του  $r$ ,  $E(r) = 12r - 2r^2 - \pi r^2/2$  αφού από την περίμετρο που παραθύρου βρίσκουμε  $h = 6 - r - \pi r/2$ . Για την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο έχουμε  $E'(r) = 12 - r(4 + \pi)$ ,  $E''(r) = -4 - \pi < 0$ , οπότε το εμβαδό γίνεται μέγιστο για  $r = \frac{12}{4 + \pi}$ . Σε αυτή την περίπτωση βρίσκουμε ότι  $h = \frac{12}{4 + \pi}$ .

**6)** Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικούς αριθμούς  $a, b$  ισχύει  $|\sin(a) - \sin(b)| \leq |a - b|$ .

**Λύση:** Αν  $a = b$  τότε η αποδεικτέα σχέση ισχύει ως ισότητα. Υποθέτουμε λοιπόν ότι το  $a$  είναι διάφορο του  $b$  και μάλιστα (χωρίς βλάβη της γενικότητας) ότι  $a < b$ . Η συνάρτηση  $\sin(x)$  είναι συνεχής και παραγωγίσιμη. Αρα είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα  $[a, b]$  και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα  $(a, b)$  με παράγωγο  $\sin'(x) = \cos(x)$ . Ετσι ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής και συνεπώς υπάρχει  $\xi$  στο ανοικτό διάστημα  $(a, b)$  έτσι ώστε  $\frac{|\sin(a) - \sin(b)|}{|a - b|} = \cos \xi$ . Όμως  $|\cos \xi| \leq 1$ , συνεπώς  $\frac{|\sin(a) - \sin(b)|}{|a - b|} \leq 1$  και τελικά πολλαπλασιάζοντας τα δυο μέλη της τελευταίας ανισότητας με την θετική ποσότητα  $|a - b|$  έχουμε ότι  $|\sin(a) - \sin(b)| \leq |a - b|$ .



Σχήμα 6: Το σχήμα της λύσης της άσκησης 5.

# Ασκήσεις Γενικά Μαθηματικά Ι

## Λύσεις ασκήσεων Ομάδας 7

Λουκάς Βλάχος και Χάρης Σκόκος

1) Να υπολογισθούν τα όρια των ακολουθιών:

$$1. a_n = \left( \frac{7n+1}{7n-1} \right)^n$$

$$2. a_n = \frac{n^{1/3} \cos n}{n+1}$$

$$3. a_n = n\sqrt{2n+3} - n\sqrt{2n}$$

**Λύση:**

$$1. a_n = \left( \frac{1 + \frac{1}{7n}}{1 - \frac{1}{7n}} \right)^n = \frac{\left( 1 + \frac{1/7}{n} \right)^n}{\left( 1 + \frac{-1/7}{n} \right)^n}. \text{ Είναι γνωστό ότι } a_n = \lim \left( 1 + \frac{x}{n} \right)^n = e^x, \text{ οπότε}$$
$$\text{έχουμε } \lim a_n = \frac{e^{1/7}}{e^{-1/7}} = e^{2/7}.$$

$$2. a_n = \frac{n^{1/3}}{n+1} \cos n. \text{ Η ακολουθία } \cos n \text{ είναι φραγμένη αφού } |\cos n| \leq 1, \text{ και η}$$
$$\text{ακολουθία } \frac{n^{1/3}}{n+1} \text{ είναι μηδενική αφού } \lim \frac{n^{1/3}}{n+1} = \lim \frac{\frac{n^{1/3}}{n}}{\frac{n+1}{n}} = \lim \frac{\frac{1}{n^{2/3}}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{0}{1+0} =$$
$$0. \text{ Οπότε, η ακολουθία } a_n \text{ ως γινόμενο μιας μηδενικής επί μία φραγμένη ακολουθία}$$
$$\text{είναι μηδενική, άρα } \lim a_n = 0.$$

$$3. \text{ Έχουμε απροσδιοριστία } \infty - \infty. \text{ Όμως, αν πολλαπλασιάσουμε και διαιρέσουμε επί}$$
$$\text{την συζυγή παράσταση θα έχουμε: } \lim a_n = \lim n \frac{(\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n})(\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n})}{(\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n})} =$$

$$\lim n \frac{3}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n}} = \lim \left( n \frac{3}{n^{1/2} \left( \sqrt{2 + \frac{3}{n}} + \sqrt{2} \right)} \right) = +\infty \frac{3}{2\sqrt{2}} = +\infty.$$

2) Να εξετασθούν ως προς τη σύγκλιση οι παρακάτω σειρές:

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^2}$

2.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+5}$

3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n}$

**Λύση:**

1. Η σειρά δεν συγκλίνει, διότι αν εφαρμόσουμε το κριτήριο λόγου θα έχουμε:  $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| =$

$$\lim \frac{e^{n+1}n^2}{e^n(n+1)^2} = e \lim \frac{n^2}{(n+1)^2} = e > 1.$$

2. Η σειρά αυτή είναι εναλλάσσουσα. Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο του Λειβνιτζ. Για την ακολουθία  $a_n = \frac{1}{n+5}$  έχουμε ότι: α) Έχει θετικούς όρους, β) Είναι φθίνουσα, αφού  $a_{n+1} < a_n$  γ) Συγκλίνει στο 0, αφού  $\lim \frac{1}{n+5} = 0$ . Συνεπώς η σειρά μας συγκλίνει.

3. Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο της ρίζας για την ακολουθία  $a_n = \frac{n^{10}}{10^n}$ .  $\lim \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{10} (\lim \sqrt[n]{n})^{10} = \frac{1}{10} (1)^{10} = \frac{1}{10} < 1$ . Συνεπώς, η σειρά συγκλίνει.

**3)**

1. Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor της  $f(x) = e^x$  κέντρου 0 υπολογίστε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - x - 1}{x^2 e^x}$ .

2. Να αναπτυχθεί σε σειρά Taylor κέντρου 0 η συνάρτηση  $f(x) = 1 - e^{-2x^2}$ .

**Λύση:**

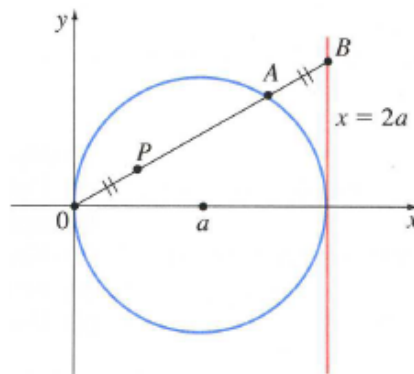
1. Το ανάπτυγμα Taylor της  $f(x) = e^x$  είναι:  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

$$\begin{aligned} \text{Συνεπώς } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - x - 1}{x^2 e^x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right) - x - 1}{x^2 \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right)} = \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots}{x^2 \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right)} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \left(\frac{1}{2!} + \frac{x}{3!} + \dots\right)}{x^2 \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2. Χρησιμοποιώντας και πάλι το ανάπτυγμα Taylor της εκθετικής συνάρτησης έχουμε:

$$f(x) = 1 - e^{-2x^2} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2x^2)^n}{n!} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!} x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n!} x^{2n}.$$

- 4) Να υπολογισθεί η παραμετρική εξίσωση για το σύνολο των σημείων  $P$  (βλέπε Σχ. 1) που υπολογίζονται από τη συνθήκη  $|OP| = |AB|$ . Να σχεδιαστεί η καμπύλη.



Σχήμα 1: Η καμπύλη του Διοκλή

**Λύση:** Ονομάζουμε  $P(X, Y)$ ,  $B(2a, y_2)$  και  $A(x_1, y_1)$ . Όλα τα σημεία βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία που σχηματίζει γωνία  $\theta$  με τον άξονα των  $x$ , άρα ισχύει:

$$\tan \theta = \frac{y_P - y_0}{x_P - x_0} = \frac{y_A - y_0}{x_A - x_0} = \frac{y_B - y_0}{x_B - x_0}$$

Συγκεκριμένα:

$$\frac{y_A - y_0}{x_A - x_0} = \frac{y_B - y_0}{x_B - x_0} \rightarrow \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{2a} \rightarrow y_2 = \frac{2ay_1}{x_1} \quad (1)$$

Επειδή  $OP = AB$ , ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} x_{OP} \cos \theta &= x_{AB} \cos \theta \rightarrow \\ x_P - x_O &= x_B - x_A \rightarrow \\ X &= 2a - x_1 \end{aligned} \quad (2)$$

Για τον ίδιο λόγο ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}
 y_{OP} \sin \theta &= y_{AB} \sin \theta \rightarrow \\
 y_P - y_0 &= y_B - y_A \rightarrow \\
 Y &= y_2 - y_1 \rightarrow \\
 Y &= \frac{2ay_1 - y_1x_1}{x_1}
 \end{aligned} \tag{3}$$

Όμως το σημείο  $A(x_1, y_1)$  ανήκει σε κύκλο, άρα ισχύει:

$$\begin{aligned}
 (x_1 - a)^2 + y_1^2 &= a^2 \rightarrow \\
 x_1^2 - 2ax_1 + y_1^2 &= 0 \rightarrow \\
 y_1 &= \pm \sqrt{-x_1^2 + 2ax_1}
 \end{aligned}$$

Άρα η 3 γίνεται:

$$\begin{aligned}
 Y &= \frac{\pm \sqrt{-x_1^2 + 2ax_1}(2a - x_1)}{x_1} \rightarrow \\
 Y &= \frac{\pm \sqrt{2a - x_1}(2a - x_1)}{\sqrt{x_1}} \rightarrow \\
 Y &= \pm \frac{\sqrt{(-x_1 + 2a)^3}}{\sqrt{x_1}}
 \end{aligned} \tag{4}$$

Άρα από 2 και 4 η παραμετρική εξίσωση της καμπύλης είναι:

$$\begin{aligned}
 X &= 2a - t \\
 Y &= \pm \frac{\sqrt{(-t + 2a)^3}}{\sqrt{t}}
 \end{aligned}$$

Για τη μελέτη της συνάρτησης θα χρησιμοποιήσουμε  $Y > 0$ , αφού η συνάρτηση είναι συμμετρική ως προς τον  $x'$ .

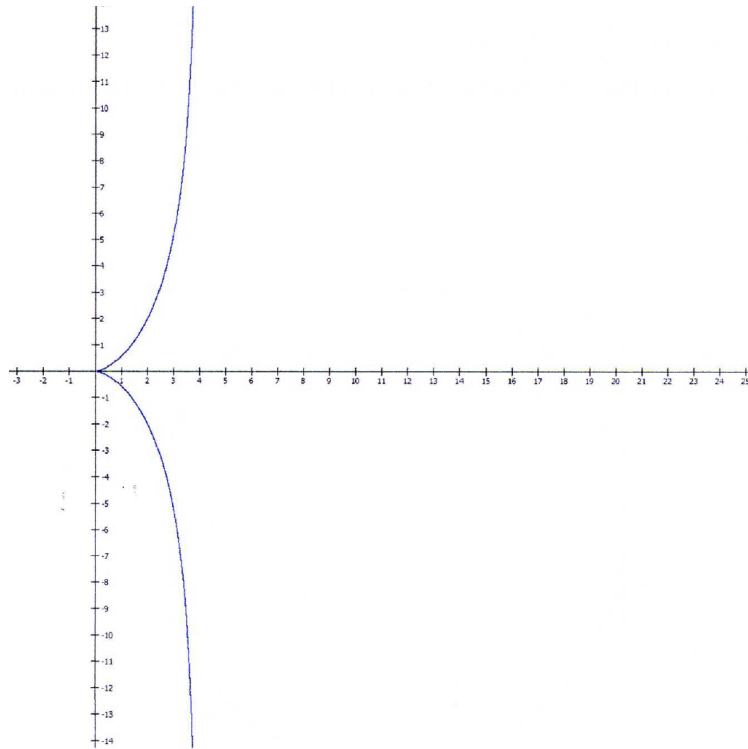
$$\frac{dY}{dX} = \frac{\frac{dY}{dt}}{\frac{dX}{dt}} = \frac{\frac{-12ta + 6t^2 - \sqrt{2a-t}}{2t\sqrt{t}}}{-1} = \frac{6t(2a - t) + \sqrt{2a-t}}{2t\sqrt{t}}$$

Η παράγωγος αυτή είναι μονίμως θετική επειδή  $t = x_1 > 0$  και επειδή  $2a - t = 2a - x_1 = x_B - x_A > 0$ . Άρα η  $Y(X)$  είναι γνησίως αύξουσα.

Ελέγχουμε την πιθανότητα ύπαρξης ασύμπτωτης στο  $x = 2a$ . Στο  $\lim_{x \rightarrow 2a^-} [Y(X)]$  θέτουμε όπου  $x$  το  $t$ . Για  $x \rightarrow 2a^-, t \rightarrow 0^+$ . Άρα:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} [Y(t)] = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{(-t + 2a)^3}}{\sqrt{t}} = +\infty$$

Επομένως η  $Y(X)$  έχει ως ασύμπτωτη την  $x = 2a$ . Αποτέλεσμα αυτού είναι η συνάρτηση να στρέφει τα κοίλα άνω. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι:



5) Δίνεται η συνάρτηση Bessel με γενική έκφραση

$$J_2(x) = -\frac{1}{x} \left[ \left( \frac{3}{x^2} - 1 \right) \cos x + \frac{3 \sin x}{x} \right].$$

Με την προϋπόθεση ότι  $|x| \ll 1$ , να αποδείξετε ότι, σε πρώτη προσέγγιση, η συνάρτηση Bessel παίρνει την μορφή  $J_2(x) \simeq -3/x^3$ .

**Λύση:** Αναπτύσσουμε το συνημίτονο και το ημίτονο σε σειρά

$$J_2(x) \approx -\frac{1}{x} \left[ \left( \frac{3}{x^2} - 1 \right) \left( 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \right) + \frac{3}{x} \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \right) \right] \approx -\frac{3}{x^3}.$$

6) (α) Βρείτε τις ασύμπτωτες της υπερβολής

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

όπου  $(|x| \geq a, a \geq b > 0)$ , (β) Να σχεδιαστεί η καμπύλη  $r = 3(1 + 2 \cos \theta)$  (γ) Η μεταβολή του μήκους μιάς καμπύλης δίδεται από την σχέση  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ . Να υπολογισθεί το  $ds/d\theta$  των καμπύλων  $r = 1 + \cos \theta$  (αστροειδής) και  $r = e^{\theta/4}$  (λογαριθμική σπείρα)

**Λύση:** (α) Λύνουμε ως προς  $y$ :

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 \Leftrightarrow y^2 = b^2 \left( \frac{x^2}{a^2} - 1 \right) \Leftrightarrow y = \pm b \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$$

Ας εξετάσουμε την περίπτωση όπου  $y \geq 0$ :

$$y(x) = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

Όταν  $x \rightarrow \infty$  ο παράγοντας  $\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$  τείνει στο 1, που σημαίνει ότι η  $y(x)$  τείνει ασυμπτωτικά στο  $\frac{b}{a}x$ . Μια πιο αυστηρή απόδειξη είναι να θεωρήσουμε τη διαφορά:

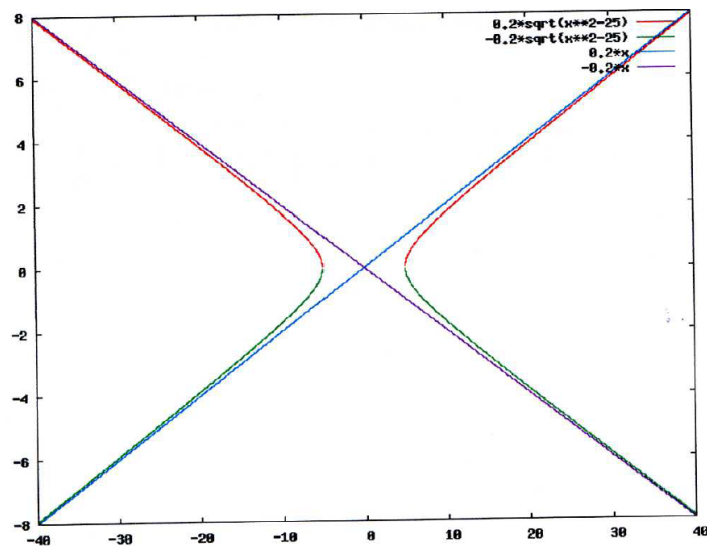
$$d(x) = y(x) - \frac{b}{a}x = \frac{b}{a}(\sqrt{x^2 - a^2} - x) = \frac{b}{a} \frac{x^2 - a^2 - x^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = \frac{-ab}{\sqrt{x^2 - a^2} + x}$$

Οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} d(x) = 0$$

Απ' όπου προκύπτει, όπως πριν, ότι για  $x \rightarrow \infty$  είναι  $y(x) \rightarrow \frac{b}{a}x$ . Ομοίως για  $x \rightarrow -\infty$  είναι  $y(x) \rightarrow -\frac{b}{a}x$ . Λόγω συμμετρίας της υπερβολής, οι ασύμπτωτες ευθείες για την περίπτωση  $y \leq 0$  είναι οι ίδιες με προηγουμένως.

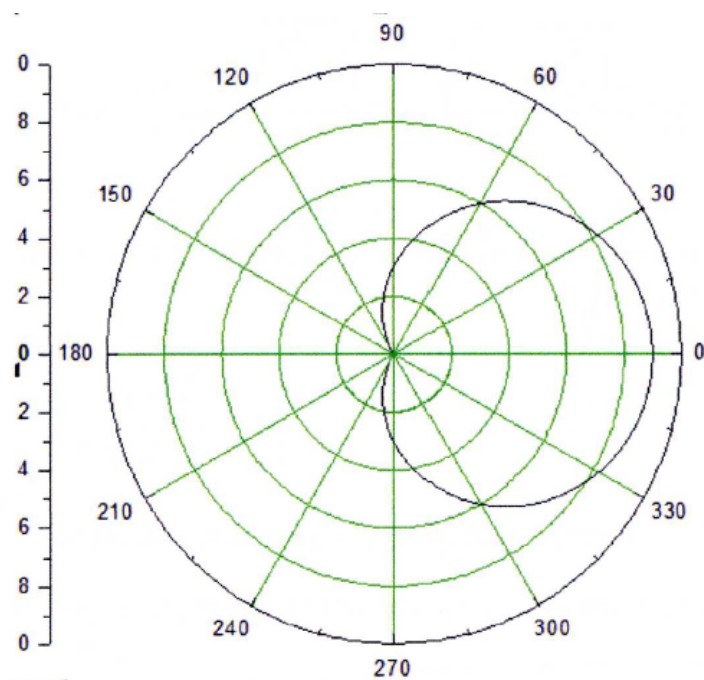
Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται μια εφαρμογή για την περίπτωση  $a = 5, b = 1$ .



(β) Η καμπύλη  $r = 3(1 + 2 \cos \theta)$  εκφράζεται σε πολικές συντεταγμένες και η γραφική της παράσταση είναι το καρδιοειδές. Για να βρω ποια μορφή έχει ακριβώς θα κάνω έναν πίνακα τιμών

| $\theta$  | $r = 3(1 + 2 \cos \theta)$ |
|-----------|----------------------------|
| 0         | 9                          |
| $\pi/6$   | 8, 11                      |
| $\pi/3$   | 6                          |
| $\pi/2$   | 3                          |
| $2\pi/3$  | 0                          |
| $5\pi/6$  | -2, 1                      |
| $\pi$     | -3                         |
| $7\pi/6$  | -2, 1                      |
| $4\pi/3$  | 0                          |
| $3\pi/2$  | 3                          |
| $5\pi/3$  | 6                          |
| $11\pi/6$ | 8, 1                       |
| $2\pi$    | 9                          |

Σύμφωνα με τα παραπάνω η γραφική παράσταση που προκύπτει είναι



(γ) Δίνεται από την άσκηση ότι:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Εάν περάσουμε σε ένα σύστημα πολικών συντεταγμένων τότε η συνάρτηση  $y = f(x)$  ορίζεται παραμετρικά από τις  $x = r(\theta) \cos \theta$  και  $y = r(\theta) \sin \theta$ :

$$dx = d(r(\theta) \cos \theta) = (r'(\theta) \cos \theta - r(\theta) \sin \theta) d\theta$$

$$dy = d(r(\theta) \sin \theta) = (r'(\theta) \sin \theta + r(\theta) \cos \theta) d\theta$$

Οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 \\ &= (r'^2(\theta) \cos^2 \theta - 2rr' \sin \theta \cos \theta + r^2(\theta) \sin^2 \theta) d\theta^2 \\ &\quad + (r'^2(\theta) \sin^2 \theta + 2rr' \sin \theta \cos \theta + r^2(\theta) \cos^2 \theta) d\theta^2 \\ &= (r'^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + r^2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)) d\theta^2 \\ &= (r'^2 + r^2) d\theta^2 \end{aligned}$$

Άρα

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}$$

Για  $r(\theta) = 1 + \cos \theta$ , έχουμε:

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{(1 + \cos \theta)^2 + (-\sin \theta)^2} = \sqrt{1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \sqrt{2(1 + \cos \theta)}$$

Για  $r(\theta) = e^{\theta/4}$ , έχουμε:

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{e^{\theta/2} + \left(\frac{1}{4}e^{\theta/4}\right)^2} = \sqrt{e^{\theta/2} + \frac{1}{16}e^{\theta/2}} = \frac{\sqrt{17}}{4}e^{\theta/4}$$

# Ασκήσεις Γενικά Μαθηματικά Ι

## Λύσεις ασκήσεων Ομάδας 8

Λουκάς Βλάχος και Χάρης Σκόκος

1) Να εξετασθούν ως προς τη σύγκλιση οι παρακάτω σειρές:

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(\pi\alpha)}{2^n} \quad \alpha \in \mathbb{R}$

2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}$

3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^4 + 1}$

**Λύση:**

1. Επειδή  $\frac{\cos^2(\pi\alpha)}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}$  και η γεωμετρική σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  συγκλίνει, έπεται ότι η δοθείσα σειρά συγκλίνει.

2. Επειδή  $\sqrt{n^2 + n} \leq \sqrt{n^2 + n^2} = n\sqrt{2}$ , έχουμε ότι  $\frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \geq \frac{1}{n\sqrt{2}}$ . Όμως η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , και η τελευταία σειρά δεν συγκλίνει (μη μηδενικό πολλαπλάσιο αρμονικής σειράς), οπότε από την προηγούμενη ανισότητα έχουμε ότι η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}$  δεν συγκλίνει.

3. Επειδή  $\frac{n^2}{2n^4 + 1} \leq \frac{n^2}{2n^4} = \frac{1}{2n^2}$  και η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  συγκλίνει, έχουμε ότι και η αρχική σειρά συγκλίνει.

**2)** Για ποιες τιμές του  $x \in \mathbb{R}$  συγκλίνει η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} n3^n x^n$ ;

**Λύση:** Για την δυναμοσειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} n3^n x^n$  βρίσκουμε την ακτίνα σύγκλισης χρησιμοποιώντας το κριτήριο λόγου: Επειδή  $\left| \frac{(n+1)3^{n+1}x^{n+1}}{n3^n x^n} \right| = \frac{n+1}{n} 3|x| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 3|x|$ , έχουμε ότι η σειρά συγκλίνει για  $3|x| < 1$  δηλαδή για  $-1/3 < x < 1/3$  και αποκλίνει για  $|x| > \frac{1}{3}$ . Για την σύγκλιση στα άκρα αντικαθιστούμε τις συγκεκριμένες τιμές: για  $x = 1/3$  η σειρά γίνεται  $\sum_{n=1}^{\infty} n3^n \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n$  που προφανώς δεν συγκλίνει καθώς ο γενικός όρος δεν συγκλίνει στο μηδέν. Παρόμοια για  $x = -1/3$  η σειρά γίνεται  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$ , που προφανώς δεν συγκλίνει. Αρα η σειρά συγκλίνει μόνο για τις τιμές  $-1/3 < x < 1/3$ .

**3)** Έστω ότι για μία συνάρτηση  $y = f(x)$  δίνεται ότι:

$$f(1) = 1, \quad f'(1) = \frac{1}{2}, \quad f''(1) = \frac{1}{2}, \quad f'''(1) = \frac{3}{4}, \quad \dots \quad f^{(n)}(1) = \frac{n!}{2^n}.$$

Να γραφεί η σειρά Taylor της συνάρτησης αυτής γύρω από το  $x = 1$ . Για ποιές τιμές του  $x$  συγκλίνει αυτή η σειρά; Ποιά είναι η τιμή της  $f$  στο μηδέν;

**Λύση:** Χρησιμοποιώντας τον γενικό τύπο  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$  στην θέση  $a = 1$ , έχουμε:  $f(x) = \frac{f(1)}{0!} (x-1)^0 + \frac{f'(1)}{1!} (x-1)^1 + \frac{f''(1)}{2!} (x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!} (x-1)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!} (x-1)^n + \dots = \frac{1}{1} (x-1)^0 + \frac{1/2}{1!} (x-1)^1 + \frac{1/2}{2!} (x-1)^2 + \frac{3/4}{3!} (x-1)^3 + \dots + \frac{n!/2^n}{n!} (x-1)^n + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{2^n n!} (x-1)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} (x-1)^n$ .

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο της ρίζας μπορούμε να προσδιορίσουμε το διάστημα σύγκλισης της σειράς αυτής. Συγκεκριμένα, για να συγκλίνει η σειρά αρκεί να ισχύει ότι:

$$\lim \left( \sqrt[n]{\left| \frac{1}{2^n} (x-1)^n \right|} \right) < 1 \Rightarrow \lim \left( \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} \right) |x-1| < 1 \Rightarrow \frac{1}{2} |x-1| < 1 \Rightarrow -1 < x < 3.$$

Εκτός του διαστήματος  $(-1, 3)$  η σειρά δεν συγκλίνει, αφού τότε  $\lim \left( \sqrt[n]{\left| \frac{1}{2^n} (x-1)^n \right|} \right) > 1$ , όπως δεν συγκλίνει και στα άκρα του διαστήματος αφού για  $x = 3$  η σειρά γίνεται  $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ , ενώ για  $x = -1$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ .

Τέλος, δεδομένου ότι το σημείο  $x = 0$  περιλαμβάνεται στο διάστημα σύγκλισης της

σειράς, η ζητούμενη τιμή  $f(0)$  υπολογίζεται ως εξής:  $f(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} (0-1)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - -\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$ .

**4) Να υπολογιστούν τα αόριστα ολοκληρώματα**

$$\int x e^x dx, \quad \int x \sin x dx, \quad \int \ln x dx,$$

$$\int x \ln x dx, \quad \int x^2 \arctan x dx.$$

**Λύση:**

$$1. \int x e^x dx = \int x (e^x)' dx = \text{(κατά παράγοντες ολοκλήρωση)}$$

$$x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c$$

$$2. \int x \sin x dx = \int x (-\cos x)' dx = -x \cos x + \int \cos x dx =$$

$$-x \cos x + \sin x + c$$

$$3. \int \ln x dx = \int x' \ln x dx = x \ln x - \int \frac{x}{x} dx =$$

$$x \ln x - x + c$$

$$4. \int x \ln x dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x dx =$$

$$\frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c$$

$$5. \int x^2 \arctan x dx = \int \left(\frac{x^3}{3}\right)' \arctan x dx = \frac{x^3}{3} \arctan x - \int \frac{x^3}{3} (\arctan x)' dx =$$

$$\frac{x^3}{3} \arctan x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{x^2+1} dx$$

$$\text{Έχουμε } \frac{x^3}{-x^3 - x} \bigg| \frac{x^2 + 1}{x}$$

Άρα σύμφωνα με την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης έχουμε ότι  $x^3 = x(x^2 + 1) - x$

Άρα

$$\begin{aligned}\int x^2 \arctan x dx &= \frac{x^3}{3} \arctan x - \frac{1}{3} \int \frac{x(x^2+1)-x}{x^2+1} dx = \\ \frac{x^3}{3} \arctan x - \frac{1}{3} \int \left( x - \frac{x}{x^2+1} \right) dx &= \frac{x^3}{3} \arctan x - \frac{1}{3} \int x dx + \frac{1}{3} \int \frac{x}{x^2+1} dx = \\ \frac{x^3}{3} \arctan x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6} \ln(x^2+1) + c\end{aligned}$$

**5) Να υπολογιστούν τα αόριστα ολοκληρώματα**

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}, \quad \int \sqrt[3]{1+x} dx, \quad \int x\sqrt{x-1} dx, \\ \int \frac{e^x}{e^{2x}-2e^x+1} dx, \quad \int \sqrt{1-x^2} dx.\end{aligned}$$

**Λύση:**

1.  $I = \int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$

Θέτω  $u = \sqrt{x} \Rightarrow x = u^2$  με  $dx = 2udu$ . Άρα έχω

$$I = \int \frac{2u}{u^2+u} du = 2 \int \frac{1}{u+1} du = 2 \ln|u+1| = 2 \ln(\sqrt{x}+1) + c$$

2.  $\int \sqrt[3]{1+x} dx = \int (1+x)^{1/3} dx = \frac{3}{4}(1+x)^{4/3} + c$

3.

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x-1} dx &= \int x(x-1)^{1/2} dx = \int x \left( \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} \right)' dx = \\ \frac{2}{3}x(x-1)^{3/2} - \frac{2}{3} \int (x-1)^{3/2} dx &= \frac{2}{3}x(x-1)^{3/2} - \frac{2}{3} \frac{2}{5}(x-1)^{5/2} = \\ \frac{2}{3}x(x-1)^{3/2} - \frac{4}{15}(x-1)^{5/2} + c\end{aligned}$$

4.  $\int \frac{e^x}{e^{2x}-2e^x+1} dx = \int \frac{e^x}{(e^x-1)^2} dx = -\frac{1}{e^x-1} + c$

5.  $I = \int \sqrt{1-x^2} dx$  Θέτω  $x = \sin u$  άρα  $dx = \cos u du$ . Οπότε

$$\begin{aligned}I &= \int \cos u \sqrt{1-\sin^2 u} du = \int \cos u |\cos u| du = \\ \pm \int \cos^2 u du &= \pm \int \frac{1+\cos 2u}{2} du = \pm \frac{1}{2} \int (u + \sin 2u)' du = \\ \pm \left( \frac{1}{2}u + \frac{1}{4} \sin 2u \right) + c &= \pm \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} \sin u \cos u = \\ \pm \frac{1}{2} (\arcsin x + x\sqrt{1-x^2})\end{aligned}$$

6) Να υπολογιστούν τα αόριστα ολοκληρώματα

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}, \quad \int \frac{dx}{x+x^3}, \quad \int \frac{dx}{x^2+x+1}.$$

**Λύση:**

$$1. I = \int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}$$

$$\frac{1}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-2} \Rightarrow$$

$$1 = A(x-1)(x-2) + B(x-2) + C(x-1)^2 \Rightarrow$$

$$1 = Ax^2 - 3Ax + 2A + Bx - 2B + Cx^2 - 2Cx + C \Rightarrow$$

$$1 = (A+C)x^2 + (-3A+B-2C)x + 2A-2B+C \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ 3A+2C-B=0 \\ 2A-2B+C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=B=-1 \\ C=1 \end{cases}$$

Οπότε

$$I = \int \left( -\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-2} \right) dx =$$

$$-\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + \ln|x-2| + c$$

$$2. I = \int \frac{dx}{x^3+x}$$

$$\frac{1}{x^3+x} = \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \Rightarrow$$

$$1 = A(x^2+1) + Bx^2 + Cx \Rightarrow 1 = (A+B)x^2 + Cx + A \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=0 \end{cases}$$

$$\text{άρα } I = \int \left( \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} \right) dx = \ln|x| - \frac{1}{2}(x^2+1)$$

$$3. \int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{x^2+2\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$$

$$\int \frac{\frac{dx}{\frac{3}{4}\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1\right]}}{\frac{3}{4}\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1\right]} = \frac{4}{3} \int \frac{dx}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1}$$

$$\text{Οπότε θέτω } u = \frac{2}{\sqrt{3}} \left( x + \frac{1}{2} \right) \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{1}{2} \text{ με } dx = \frac{\sqrt{3}}{2}du$$

Επομένως

$$I = \frac{4}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{1}{u^2+1} du = \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan u = \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \left( x + \frac{1}{2} \right) \right) + c$$

# Ασκήσεις Γενικά Μαθηματικά Ι

## Λύσεις ασκήσεων Ομάδας 9

Λουκάς Βλάχος και Χάρης Σκόκος

**1)** Να βρεθεί αναδρομικός τύπος, ως προς  $n$ , για το ορισμένο ολοκλήρωμα  $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , και στη συνέχεια να υπολογιστεί το  $I_3$ .

**Λύση:** Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε για  $n \geq 1$ :  $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx = \int_1^e x' (\ln x)^n dx = [x(\ln x)^n]_{x=1}^{x=e} - \int_1^e x n (\ln x)^{n-1} \frac{1}{x} dx = e - n I_{n-1}$ . Άρα ο αναδρομικός τύπος είναι  $I_n = e - n I_{n-1}$  και ισχύει για  $n \geq 1$  με  $I_0 = \int_1^e dx = e - 1$ . Επομένως έχουμε  $I_1 = e - I_0 = e - (e - 1) = 1$ ,  $I_2 = e - 2I_1 = e - 2$ ,  $I_3 = e - 3I_2 = e - 3(e - 2) = 6 - 2e$ .

**2)** Να υπολογιστούν τα αόριστα ολοκληρώματα:

1.  $\int \frac{\ln(\tan x)}{\sin^2 x} dx$
2.  $\int \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx$
3.  $\int \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

**Λύση:**

1.  $\int \frac{\ln(\tan x)}{\sin^2 x} dx = - \int (\cot x)' \ln(\tan x) dx = - \cot x \ln(\tan x) + \int \frac{\cos x \cos x}{\sin x \sin x \cos^2 x} \frac{1}{\cos^2 x} dx = - \cot x \ln(\tan x) + \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = - \cot x \ln(\tan x) - \cot x + c$ .
2.  $\int \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx = \int \frac{(1+x) - 1}{(1+x)^2} e^x dx = \int \frac{e^x}{1+x} dx - \int \frac{e^x}{(1+x)^2} dx = \int \frac{e^x}{1+x} dx + \int \left[ \frac{1}{1+x} \right]' e^x dx = \int \frac{e^x}{1+x} dx + \frac{e^x}{1+x} - \int \frac{e^x}{1+x} dx = \frac{e^x}{1+x}$ .

3. Θέτουμε:  $t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2t dt$ . Επομένως έχουμε:  $\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{2^t}{t} 2t dt = 2 \int e^{t \ln 2} dt = \frac{2}{\ln 2} e^{t \ln 2} + c = \frac{2}{\ln 2} 2^t + c$ .

**3) Να υπολογιστούν τα ορισμένα ολοκληρώματα:**

1.  $I_1 = \int_0^3 \frac{x^2}{(x^2 + 9)^2} dx$

2.  $I_2 = \int_{-3}^6 x \sqrt{x+3} dx$

**Λύση:**

1. Υπολογίζουμε αρχικά το αντίστοιχο αόριστο ολοκλήρωμα:  $I_1 = \int \frac{x^2}{(x^2 + 9)^2} dx = \int x \frac{x}{(x^2 + 9)^2} dx = -\frac{1}{2} \int x \left( \frac{1}{x^2 + 9} \right)' dx = -\frac{x}{2(x^2 + 9)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 9} = -\frac{x}{2(x^2 + 9)} + \frac{1}{18} \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1} = -\frac{x}{2(x^2 + 9)} + \frac{1}{6} \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + c$ . Επομένως έχουμε  $I_1 = \left[ -\frac{3}{36} + \frac{1}{6} \arctan(1) \right] - \left[ 0 + \frac{1}{6} \arctan(0) \right] = \frac{\pi - 2}{24}$ .

2. Υπολογίζουμε αρχικά το αντίστοιχο αόριστο ολοκλήρωμα:  $\int x \sqrt{x+3} dx = \int (x+3) \sqrt{x+3} dx - 3 \int \sqrt{x+3} dx = \int (x+3)^{3/2} dx - 3 \int (x+3)^{1/2} dx = \frac{2}{5} (x+3)^{5/2} - 2(x+3)^{3/2} + c$ . Επομένως έχουμε  $I_2 = \frac{2}{5} 9^{5/2} - 2 \cdot 9^{3/2} = \frac{216}{5}$ .

**4) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα**

1.  $\int \sec x dx$

2.  $\int \sin(7x) \cos(3x) dx$

3.  $\int \tan^2 x \sec x dx$

**Λύση:**

(α)

$$\begin{aligned}\int \sec x dx &= \int \sec x \left[ \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} \right] dx \\ &= \int \left[ \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} \right] dx\end{aligned}$$

$$u = \sec x + \tan x$$

$$du = (\sec x \tan x + \sec^2 x) dx$$

$$\begin{aligned}&= \int \frac{1}{u} du = \ln |u| + c \\ &= \ln |\sec x + \tan x| + c\end{aligned}$$

(β)

$$\begin{aligned}\int \sin(7x) \cos(3x) dx &= \frac{1}{2} \int (\sin(4x) + \sin(10x)) dx \\ &= -\frac{1}{8} \cos(4x) - \frac{1}{20} \cos(10x) + c\end{aligned}$$

(γ)

$$\begin{aligned}\int \tan^2 x \sec x dx &= \int (\sec^2 x - 1) \sec x dx \\ &= \int \sec^2 x dx - \int \sec x dx\end{aligned}$$

από την αναδρομική σχέση

$$\int \sec^n x dx = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} x \tan x + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x dx$$

άρα

$$\begin{aligned} & \int \sec^3 x dx - \int \sec x dx = \\ &= \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \int \sec x dx - \int \sec x dx \\ &= \frac{1}{2} \sec x \tan x - \frac{1}{2} \int \sec x dx \\ &= \frac{1}{2} \sec x \tan x - \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| + c \end{aligned}$$

**5)** Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-2x^2}}$$

**Λύση:**

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-2x^2}}$$

Η παράσταση

$$\begin{aligned} 5-4x-2x^2 &= 7-(\sqrt{2}(x+1))^2 \\ &= 7 \left[ 1 - \left( \frac{\sqrt{2}(x+1)}{\sqrt{7}} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

άρα

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{7} \sqrt{1 - \left( \frac{\sqrt{2}(x+1)}{\sqrt{7}} \right)^2}} dx$$

$$u = \frac{\sqrt{2}(x+1)}{\sqrt{7}}$$

$$du = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} dx$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin u + c = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \left( \frac{\sqrt{2}(x+1)}{\sqrt{7}} \right) + c$$

**6)** Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

**Λύση:**

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

αν θέσουμε  $x = \tan \theta$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$\sqrt{1+x^2} = \sec \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$dx = \sec^2 \theta$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} &= \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\sec \theta} = \int \sec \theta d\theta \\ &= \ln |\sec \theta + \tan \theta| + c = \\ &= \ln |\sqrt{1+x^2} + x| + c \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \left[ \ln |\sqrt{1+x^2} + x| \right]_0^1 = \ln(\sqrt{2} + 1)$$

# Ασκήσεις Γενικά Μαθηματικά Ι

## Λύσεις ασκήσεων Ομάδας 10

Λουκάς Βλάχος και Χάρης Σκόκος

**1)** Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα  $\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^p} dx$ ,  $p \in \mathbb{R}$  συγκλίνει αν και μόνο αν  $p < 1$ .

**Λύση:** Το πεδίο ορισμού της  $\frac{1}{(x-1)^p}$  είναι το  $\mathbb{R} - \{1\}$  αν  $p > 0$  και όλο το  $\mathbb{R}$  αν  $p \leq 0$ .

Επίσης έχουμε  $I = \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^p} dx = \lim_{a \rightarrow 1^+} \int_a^2 \frac{1}{(x-1)^p} dx$ . Υπολογίζουμε το αόριστο ολοκλήρωμα  $\int \frac{1}{(x-1)^p} dx = \begin{cases} \ln|x-1| & \text{αν } p = 1, \\ \frac{(x-1)^{-p+1}}{-p+1} & \text{αν } p \neq 1. \end{cases}$ . Στη συνέχεια υπολογίζουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα για

$$1. \ p = 1: I = \lim_{a \rightarrow 1^+} [\ln|x-1|]_a^2 = \ln 1 - \lim_{a \rightarrow 1^+} \ln|a-1| = 0 - (-\infty) = +\infty$$

$$2. \ p \neq 1: I = \lim_{a \rightarrow 1^+} \left[ \frac{(x-1)^{-p+1}}{-p+1} \right]_a^2 = \lim_{a \rightarrow 1^+} \left[ \frac{1^{-p+1}}{-p+1} - \frac{(a-1)^{-p+1}}{-p+1} \right] = \frac{1}{-p+1} - \lim_{a \rightarrow 1^+} \frac{(a-1)^{-p+1}}{-p+1} = \begin{cases} +\infty & \text{αν } p > 1, \\ \frac{1}{1-p} & \text{αν } p < 1. \end{cases}$$

Συνεπώς το ολοκλήρωμα συγκλίνει μόνο για τις τιμές του  $p$  που είναι μικρότερες της μονάδας.

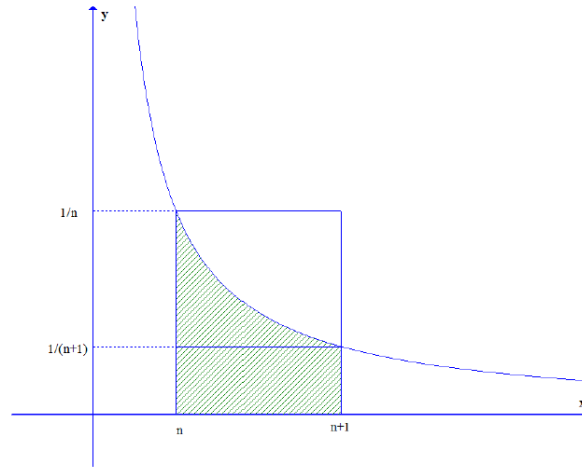
**2)** Για κάθε φυσικό αριθμό  $n$ , θεωρούμε την επιφάνεια με εμβαδό  $E_n$  κάτω από την γραφική παράσταση της  $f(x) = \frac{1}{x}$ , πάνω από τον άξονα των  $x$  και μεταξύ των ευθειών  $x = n$  και  $x = n+1$ .

$$1. \text{ Να δείξετε ότι ισχύει } \frac{1}{n+1} \leq E_n \leq \frac{1}{n}.$$

$$2. \text{ Αφού υπολογίσετε το } E_n, \text{ δείξτε ότι } \ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \ln(n+1) + \frac{n}{n+1}.$$

**Λύση:**

1. Το εμβαδόν του εγγεγραμμένου ορθογωνίου (δες σχήμα 1) ισούται προς  $\frac{1}{n+1}$  και του περιγεγραμμένου  $\frac{1}{n}$ . Επομένως  $\frac{1}{n+1} \leq E_n \leq \frac{1}{n}$ .



Σχήμα 1: Το σχήμα της άσκησης 2.

2. Υπολογίζουμε  $E_n = \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1) - \ln(n)$ , οπότε έχουμε διαδοχικά τις ανισότητες:

$$\frac{1}{2} \leq \ln 2 - \ln 1 \leq 1$$

$$\frac{1}{3} \leq \ln 3 - \ln 2 \leq \frac{1}{2}$$

$\vdots$

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}$$

και θεωρώντας το άθροισμα κατά μέλη έχουμε την διπλή ανισότητα

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \leq \ln(n+1) - \ln 1 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k},$$

από την οποία έχουμε (δεξιά ανισότητα)

$$\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad (1)$$

και (αριστερή ανισότητα)

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \leq \ln(n+1) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - 1 + \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \ln(n+1) + 1 - \frac{1}{n+1}. \quad (2)$$

Οι (1) και (2) δίνουν την ζητούμενη διπλή ανισότητα.

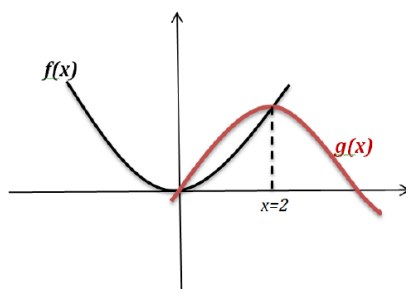
**3)** Να βρεθεί το εμβαδόν της φραγμένης περιοχής που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = x^2$  και  $g(x) = x(4 - x)$ . Στη συνέχεια να προσδιορισθεί η τιμή του  $a$  ώστε η ευθεία  $x = a$  να χωρίζει την περιοχή αυτή σε δύο ισεμβαδικά τμήματα.

**Λύση:** Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων που δίνονται τέμνονται στα σημεία που αντιστοιχούν στις τιμές  $x = 0$  και  $x = 2$  αφού:  $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 = x(4 - x) \Leftrightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow 2x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 2$ . Επίσης  $f(x) < g(x) \Leftrightarrow 2x(x - 2) < 0 \Leftrightarrow x \in [0, 2]$ , οπότε η γραφική παράσταση της  $f(x)$  είναι κάτω από αυτήν της  $g(x)$  στο διάστημα  $[0, 2]$  ενώ η  $f(x)$  είναι μεγαλύτερη στα διαστήματα  $(-\infty, 0)$  και  $(2, +\infty)$ , όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.

Από την μονοτονία και τα όρια των συναρτήσεων καθώς το  $x$  τείνει στο  $+\infty$  ή  $-\infty$ , η φραγμένη περιοχή αντιστοιχεί για  $x$  στο διάστημα  $[0, 2]$ .

Το ζητούμενο εμβαδόν επομένως θα είναι:  $\int_0^2 (g(x) - f(x))dx = \int_0^2 (4x - 2x^2)dx = \left[ 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^2 = \frac{8}{3}$ .

Αν  $x = a$  είναι η ευθεία που χωρίζει την περιοχή σε δύο ισεμβαδικά τμήματα, θα πρέπει το πρώτο τμήμα να έχει εμβαδό ίσο με το μισό του συνολικού:  $\int_0^a (g(x) - f(x))dx = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \left[ 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^a = \frac{4}{3} \Leftrightarrow a^3 - 3a^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow (a - 1)(a^2 - 2a - 2) = 0 \Leftrightarrow a = 1$ , αφού το  $a$  είναι πραγματικός αριθμός.

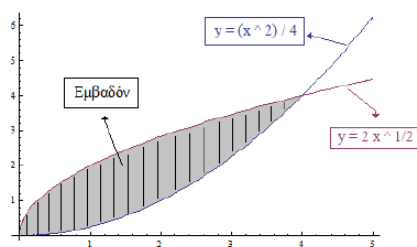


Σχήμα 2: Το σχήμα της άσκησης 3.

**4)** Να ευρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από τις καμπύλες  $y^2 = 4x$ ,  $x^2 = 4y$ .

**Λύση:**

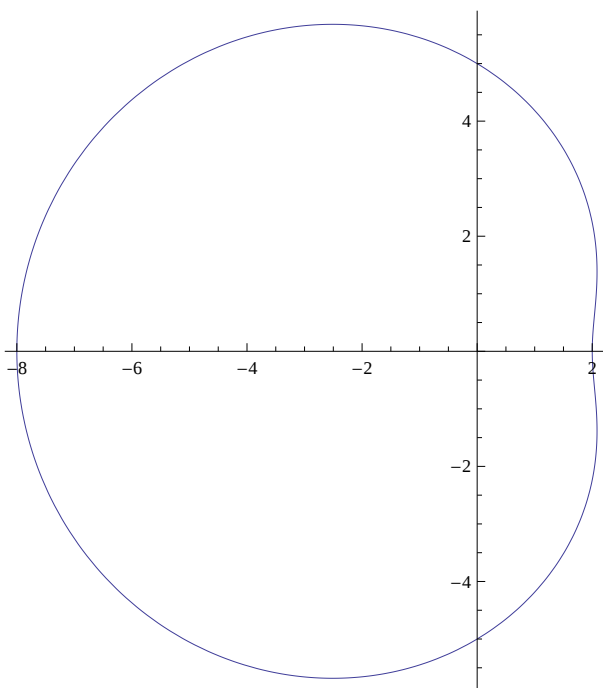
$$E = \int_0^4 \left( 2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4} \right) dx = \frac{16}{3}.$$



Σχήμα 3: Η επιφάνεια που πρέπει να υπολογίσουμε.

**5)** Να υπολογισθεί το εμβαδόν της επιφάνειας στο εσωτερικό της καμπύλης  $r = 5 - 3 \cos \theta$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

**Λύση:** Η γραφική παράσταση της καμπύλης είναι (βλέπε Σχ. 4)



Σχήμα 4: Η επιφάνεια της άσκησης 5.

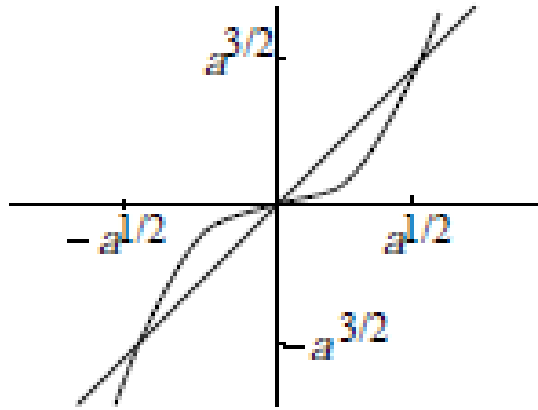
$$E = 2 \left[ \frac{1}{2} \int_0^\pi (5 - 3 \cos \theta)^2 d\theta \right] = \frac{59\pi}{2}.$$

**6)** Να υπολογισθεί το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από τις καμπύλες  $y = x^3$

και  $y = ax, a > 0$ .

**Λύση:**  $x^3 = ax, \Rightarrow x = \pm\sqrt{a}$  ή  $x = 0$ . Υπάρχουν δύο κομμάτια  $(-\sqrt{a} < x < 0, 0 < x < \sqrt{a})$  που για λόγους συμμετρίας είναι ίσα

$$2 \int_0^{\sqrt{a}} (ax - x^3) dx = \frac{a^2}{2}.$$



Σχήμα 5: Η επιφάνεια της άσκησης 6.

# Ασκήσεις Γενικά Μαθηματικά Ι

## Λύσεις ασκήσεων Ομάδας 11

Λουκάς Βλάχος και Χάρης Σκόκος

**1)** Υπολογίστε το μήκος της καμπύλης  $y = \ln(\sec x)$  για  $0 \leq x \leq \pi/4$ .

**Λύση:** 
$$L = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \tan^2 x} dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{\sec^2 x} dx = \int_0^{\pi/4} |\sec x| dx = \int_0^{\pi/4} \sec x dx = \int_0^{\pi/4} \sec x \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} dx = \ln |\sec x + \tan x|_0^{\pi/4} = \ln(\sqrt{2} + 1).$$

**2)** Υπολογίστε το εμβαδό που περικλείεται από τον οριζόντιο άξονα και την καμπύλη με παραμετρική εξίσωση  $x = 6(\theta - \sin \theta)$ ,  $y = 6(1 - \cos \theta)$  (κυκλοειδής) για  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

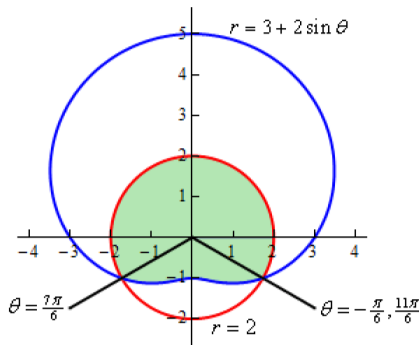
**Λύση:** 
$$E = \int_0^{2\pi} y(\theta) \frac{dx(\theta)}{d\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} 36(1 - \cos \theta)^2 d\theta = 36 \int_0^{2\pi} \left( \frac{3}{2} - 2 \cos \theta + \frac{1}{2} \cos(2\theta) \right) d\theta = 108\pi.$$

**3)** Υπολογίστε το εμβαδό της περιοχής που βρίσκεται εντός και των δυο καμπυλών με εξισώσεις  $r = 3 + 2 \sin \theta$  και  $r = 2$ .

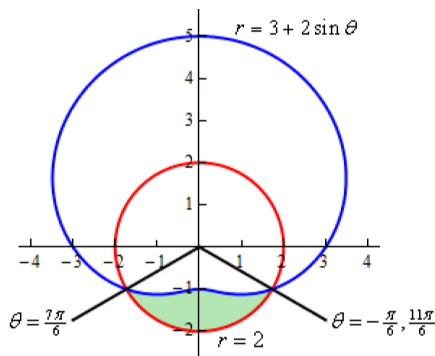
**Λύση:** Το ζητούμενο εμβαδόν  $A$  φαίνεται στο σχήμα 1 και μπορεί να υπολογιστεί ως η διαφορά του εμβαδού του κύκλου  $r = 2$  και του εμβαδού εκτός της καμπύλης  $r = 3 + 2 \sin \theta$  και εντός του κύκλου (σχήμα 2). Το τελευταίο εμβαδόν  $E$  είναι

$$E = \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} \left[ \frac{1}{2} (2^2 - (3 + 2 \sin \theta)^2) \right] d\theta = \frac{11\sqrt{3}}{2} - \frac{7\pi}{3},$$

οπότε το ζητούμενο εμβαδό  $A$  είναι  $A = \pi 2^2 - E = \frac{19\pi}{3} - \frac{11\sqrt{3}}{2}.$



Σχήμα 1: Το ζητούμενο εμβαδόν της άσκησης 3.



Σχήμα 2: Το εμβαδόν εκτός της καμπύλης  $r = 3 + 2 \sin \theta$  και εντός του κύκλου  $r = 2$

**4)** Υπολογίστε τον όγκο του στερεού που προκύπτει με περιστροφή γύρω από τον άξονα  $x$  στην περιοχή του πρώτου τεταρτημόριου του επιπέδου  $xy$  που οριοθετείται από τους άξονες και την καμπύλη  $x^4 + r^2 y^2 = r^4$ .

**Λύση:** Η καμπύλη τέμνει τον άξονα  $y$  όταν  $r^2 y^2 = r^4$ , δηλαδή  $y = r$ . Η καμπύλη τέμνει τον άξονα  $x$  όταν  $x^4 = r^4$ , δηλαδή  $x = r$ . Άρα τα τελικά σημεία της καμπύλης είναι τα  $(0, r)$  και  $(r, 0)$ . Επομένως ο όγκος του στερεού είναι,

$$\int_{x=0}^{x=r} \pi y^2 dx.$$

Εφόσον  $y^2 = r^2 - \frac{x^4}{r^2}$ , ο όγκος είναι,

$$V = \int_{x=0}^{x=r} \pi r^2 - \frac{\pi x^4}{r^2} dx = \left( \pi r^2 x - \frac{\pi x^5}{5r^2} \right) \Big|_0^r.$$

Αυτό αποτιμάται σε  $\pi r^3 - \frac{1}{5} \pi r^3 = \frac{4}{5} \pi r^3$ .

**5)** Υπολογίστε το εμβαδόν της επιφάνειας περιστροφής που προκύπτει με περιστροφή

γύρω από τον άξονα  $y$  του τμήματος  $r^2 = 2a^2 \cos(2\theta)$  στο πρώτο τεταρτημόριο, δηλαδή στο  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ .

**Λύση:** Η πολική εξίσωση για το μήκος τόξου είναι  $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$ , η οποία είναι ισοδύναμη με  $r^2 ds^2 = r^2 dr^2 + r^4 d\theta^2$ . Με έμμεση διαφοροποίηση έχουμε,

$$2rdr = -4a^2 \sin(2\theta)d\theta, \quad r^2 dr^2 = 4a^2 \sin^2(2\theta)d\theta^2.$$

Επομένως,

$$r^2 ds^2 = r^2 dr^2 + r^4 d\theta^2 = 4a^4 \sin^2(2\theta)d\theta^2 + 4a^4 \cos^2(2\theta)d\theta^2 = 4a^4 d\theta^2.$$

Άρα  $ds = \frac{2a^2}{r} d\theta$ .

Το εμβαδόν της επιφάνειας περιστροφής δίνεται ως,

$$\int 2\pi x ds = \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} 2\pi r \cos(\theta) \frac{2a^2}{r} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\pi a^2 \cos(\theta) d\theta = 4\pi a^2 \sin(\theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}.$$

Επομένως το εμβαδόν της επιφάνειας είναι  $\frac{4\pi}{\sqrt{2}} a^2$ .

**6)** Υπολογίστε το εμβαδόν της περιοχής στο πρώτο και τέταρτο τεταρτημόριο που περιέχεται εντός του κύκλου με πολική εξίσωση  $r = 2a \cos(\theta)$  και εκτός του κύκλου με πολική εξίσωση  $r = a$ .

**Λύση:** Θέτοντας  $2a \cos(\theta)$  ίσο με  $a$ , τα σημεία τομής εμφανίζονται όταν  $2 \cos(\theta) = 1$ , δηλαδή  $\theta = -\frac{\pi}{3}$  και  $\theta = +\frac{\pi}{3}$ . Η περιοχή ανάμεσα στα δύο γραφήματα είναι  $-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ . Η εξωτερική καμπύλη είναι  $r_o = 2a \cos(\theta)$  και η εσωτερική καμπύλη  $r_i = a$ . Ο τύπος για το εμβαδόν ανάμεσα στις δύο καμπύλες είναι

$$Area = \int \frac{1}{2} (r_o^2 - r_i^2) d\theta.$$

Στην περίπτωση αυτή, το εμβαδόν είναι,

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} (4a^2 \cos^2(\theta) - a^2) d\theta = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} (4 \cos^2(\theta) - 1) d\theta.$$

Για να το υπολογίσουμε, χρησιμοποιούμε τον τύπο  $\cos^2(\theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\theta))$ . Το ολοκλήρωμα γίνεται,

$$a^2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 + 2 \cos(2\theta) - 1) d\theta = a^2 (\theta + \sin(2\theta)) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}}.$$

Επομένως το εμβαδόν είναι  $a^2 \left( \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ , δηλαδή  $\frac{2\pi+3\sqrt{3}}{6} a^2$ .